第一部分 变分法和有限元法

第一章 引 论

先谈一点变分法的历史。

变分学历史上第一个重要问题是牛顿提出的。他研究了所谓“水桶问题”，大概是这样：一水桶以固定角速度绕对称轴旋转，问桶中水面呈什么形状时所受阻力最小？他把这个问题归结为：求函数$y=f(x)$，使积分

$$Q[f(x)]=\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(x)[f'(x)]^3}{1+[f'(x)]^2}dx$$

取最小值。这问题已经是典型的变分问题，但牛顿当年用来解决问题的方法还不是变分学中的基本方法。

导致变分法建立的著名问题是瑞士数学家约翰、贝努里在1696年提出的，即“最速降线问题”。此问题发表于当年6月号的《教师学报》上。问题一提出来，立即吸引了当时世界上许多最卓越的数学家的注意。在该杂志1697年5月号上刊登了牛顿、莱布尼兹、洛比达和贝努里兄弟①的解法。他们殊途同归，用各不相同的方法得到同一解答。答案是有趣的，原来“最速降线”居然是摆线！这些解题方法中蕴含着天才的思想，就像铀矿中储藏着铀-235一样。但是只靠这些方法，变分法是创立不起来的。正如只依靠古代的极限思想无法建立微分法一样。那么，谁来清除杂质，炼出真金呢？历史安排了大数学家尤拉！他是创造各种数学方法的大师，他创立的方法几乎总带有明晰性和一般性。他在1734年解决了更广泛的最速降线问题，但他对自己当时用的方法还不满意。他开始寻找解决这类问题的一般方法，这种方法终

① “贝努里兄弟”指James Bernoulli和他的弟弟John Bernoulli。

于被他找到了，变分法也就建立了。尤拉在1736年的论文中指出：要使积分

$$Q[y]=\int_{x_1}^{x_2} F[x,y(x),y'(x)]dx \qquad (1)$$

取极值，函数$y(x)$必须满足

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \qquad (2)$$

方程（2）就是著名的“尤拉方程”。不过，许多重大数学成果的第一个证明往往失之繁琐，尤拉这次也不例外。后来法国大数学家拉格兰日改进了尤拉的证明，使之完全符合数学分析的精神而且十分简洁，他在1755年把这个证明告诉了尤拉。至此，变分学作为一个新的数学分支算是形成了。

刚才谈到的是变分法古典部分的内容，它所研究的主要问题可以归结为：在适当的函数集合内选择函数 $y=f(x)$，使积分（1）取极值。解决这一问题又归结为解尤拉方程（2）。看起来问题似乎并不复杂，办法也很平常，不过解一个微分方程罢了。其实不然，我们依靠这种方法，就能用统一的数学程序来解决自然界和其他方面的千差万别的问题，就能用奇妙的变分原理解释无数的自然现象。

参 考 文 献

〔1〕M·克莱因，《古今数学思想》，上海科技出版社，1980。

第二章　变分法初步

§1　泛　　函

在这里不介绍泛函的精确定义，因为那样做需要比较多的现代数学知识，势必兜大圈子。实际上，用几个例子也可以说明"泛函"这一概念的实质。

例 1　设函数$y=f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且$f(x)\geqslant 0$，则微分

$$Q[f]=\int_0^1 f(x)dx$$

是曲线$y=f(x)$与直线$y=0$之间的面积①。显然，对任何一个在$[0,1]$上连续且非负的函数$y=f(x)$来说，$Q[f]$有唯一确定的值与它对应。比方说，当

$$f(x)=x$$

则

$$Q[f(x)]=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

当
$$f(x)=\sqrt{x}$$

则
$$Q[f(x)]=\int_0^1 \sqrt{x}\ dx=\frac{2}{3}$$

现在我们回忆一下一元函数的定义。对于两个变量x和y，x在某数集D中取值，y在某数集R中取值。如果x任取D中某值，y都有唯一确定的值与它对应，那么我们就称变量x为自变量，变量y为自变量x的函数。我们常说函数y的值由自变量x

① 若$f(a)$及$f(b)$均为正，则$Q[f]$是由曲线$y=f(x)$，曲线$y=0$，直线$x=a$及直线$x=b$围成的图形的面积。

的值唯一确定。函数定义是大家熟悉的，其实质是“唯一确定”四个字。再返观例 1，当函数$f(x)$给定了，$Q[f(x)]$的值就“唯一确定”了，这意味着什么？这说明我们可以把变量$Q[f(x)]$看成是“函数$f(x)$的函数”。这$Q[f(x)]$也记为$Q[f]$，在此，f类似自变量，Q是f的函数。

例 2 我们把一切在$[a, b]$上连续的函数（指实函数，以下同此）的集合记为$C[a, b]$。考虑积分

$$M[f]=\int_a^b f(x)dx$$

任取一个在$[a,b]$上连续的函数$f(x)$，M有唯一确定的值与它对应。M可视为f的函数。此例和例 1 比较，f的容许范围广些。

我们看出在M和f之间，有一种函数关系，但这是推广了的函数关系，也就是下文中要讲的“泛函”。原来所谓“泛函”，不过是更广泛意义下的函数关系罢了。

例 3 把$f(x)$在$[a, b]$上的零点个数①记作$N[f]$，则任取一个在$[a, b]$上有定义的实函数$f(x)$，N有确定的值与它对应。如取$[a, b]$为$[0, 2\pi]$，则

$$N[\cos x]=2$$
$$N[\sin x]=3$$
$$N[x^2-1]=1$$

从以上几个例子中，我们可以概括出如下的重要概念：把具备某种性质的函数的集合记作D。对于集合D中的任何函数$f(x)$（即对任何$f\in D$），变量Q都有唯一确定的值与它对应，那么变量Q叫做依赖于函数$f(x)$的泛函，记为

$$Q=Q[f(x)] \quad 或 \quad Q=Q[f]②$$

这是泛函概念的一个粗浅的介绍，对于这本书来说，这种说明已经够用了。

---

① 我们把m重零点算m个零点。如$f(x)=(x-3)^2$在$[1, 4]$上有两个零点。

② $Q[f(x)]$也记作$Q[y(x)]$，在此$y=y(x)=f(x)$。

§2 变 分

1. 泛函$Q[y(x)]$中，$y(x)$的变分

对于泛函$Q[y(x)]$，$y(x)$是集合D中任何元素。如果$y(x)$由$y_0(x)$变成$y_1(x)$，则$y_1(x)-y_0(x)$叫做$y(x)$在$y_0(x)$上的变分（$y_0(x)$及$y_1(x)$均属于D），记作

$$\delta y=y_1(x)-y_0(x) \tag{3}$$

我们以后常用

$$\delta y=\overline{y}(x)-y(x) \tag{4}$$

这是指在$y(x)$上的变分。

2. 连续泛函

对于泛函$Q[y(x)]$而言，如果当$y(x)$的变分δy充分小时，Q的改变量可以任意小，那么就称泛函$Q[y(x)]$是连续的。例如，对于泛函

$$Q[y(x)]=\int_a^b y(x)dx$$

而言，当$y(x)\in C[a, b]$（参看本章§1的例2），$Q[y(x)]$有定义。对任给的$\varepsilon>0$，只要

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|y(x)-y_0(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

（$y(x)$及$y_0(x)$均属于$c[a, b]$）

则

$$|Q[y(x)]-Q[y_0(x)]|=\left|\int_a^b[y(x)-y_0(x)]dx\right|$$

$$\leqslant\int_a^b|y(x)-y_0(x)|dx<\frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx=\varepsilon$$

可见$Q[y(x)]=\int_a^b y(x)dx$是连续泛函。

3. 线性泛函

如果泛函$Q[y(x)]$与$y(x)$的关系是线性的，也就是说，Q

满足以下条件

1） $Q[cy(x)]=CQ[y(x)]$ （c为任意常数）

2） $Q[y_1(x)+y_2(x)]=Q[y_1(x)]+Q[y_2(x)]$①

这时，称$Q[y(x)]$为线性泛函。例如

$$Q[y(x)]=\int_a^b y(x)dx$$

是线性泛函。事实上

$$Q[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)]=\int_a^b[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)]dx$$
$$=c_1\int_a^b y_1(x)dx+c_2\int_a^b y_2(x)dx=c_1Q[y_1(x)]$$
$$+c_2Q[y_2(x)]$$

但是

$$Q[y(x)]=\int_c^b y^2(x)dx$$

不是线性泛函，这一点请读者自己验证。

4． 泛函的变分

在上文中已经说明"泛函"是函数这一概念的推广。现在我们还要指出，所谓"泛函的变分"正是"函数的微分"这一概念的推广。如果明白了这一点，您就懂得了"变分"概念的实质。为了把问题说清楚，我们有必要先复习一下"微分"这一概念。

现在我提一个看来非常简单的问题：什么是函数$y=f(x)$的微分？

如果您马上回答说：函数的微分就是

$$dy=f'(x)dx$$

虽然我不能说您答错了，但是您并没有说清楚"微分"的实质。要是您在谈到微分定义时，只能说出上面这句话来，那么恕我直言，您并没有学好数学分析。

究竟什么是函数的微分呢？我们知道函数关系$y=f(x)$往往

---

① 此二条件可用一个式子来表达，即
$Q[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)]=c_1Q[y_1(x)]+c_2Q[y_2(x)]$对任何常数$c_1$，$c_2$成立。

是非常复杂的，因此函数$f(x)$的增量$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$也往往是十分复杂的。例如，当

$$f(x)=\sin x$$

这时函数的增量是

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

当x已知，用此式由Δx的值可得Δy的值，但Δy与Δx之间的函数关系是非线性的。在数学分析中曾经指出：如果函数$y=f(x)$在给定点x处有导数$f'(x)$，这时

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha \quad （当\Delta x\to 0时，\alpha\to 0）$$

所以

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x=dy+\alpha\cdot\Delta x \tag{5}$$

仔细观察此式，我们发现函数的增量由两项相加而得。第一项是$dy=f'(x)\Delta x$，当x固定时$f'(x)$是常数，所以dy是与Δx成比例的。通常说dy是Δx的线性函数。第二项是$\alpha\Delta x$，当$\Delta x\to 0$时$\alpha\to 0$，所以

$$\frac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x}\longrightarrow 0 \quad （当\Delta x\to 0）$$

可见$\alpha\cdot\Delta x$是比Δx高阶的无穷小量，即

$$\alpha\cdot\Delta x=0(\Delta x) \quad （当\Delta x\to 0）$$

所以

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+0(\Delta x) \tag{6}$$

可见　$dy=f'(x)\Delta x$是函数增量的主要部分。也就是说$f'(x)\Delta x$既是Δy的线性部分，又是Δy的主要部分，即所谓“线性主要部分”。我们把函数增量的线性主要部分$f'(x)\Delta x$叫做函数的微分。这样讲，才说明了微分概念的实质。

由此可见，当$|\Delta x|$充分小的时候，我们就可用微分$dy=$

$f'(x)\Delta x$作为增量Δy的近似值了。再来看$y=\sin x$这个函数，就有如下近似式

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x\approx f'(x)\Delta x=\cos x\cdot\Delta x$$

用$\cos x\cdot\Delta x$作为Δy 的近似值，这就方便多了。可以说，用线性关系来逼近非线性关系，这是微积分学的基本思想!

有了以上的准备，我们就可以讲泛函的变分了。先看一例，对于泛函 $Q[y(x)]=\int_a^b y^2(x)dx$，它的增量可表为

$$\begin{aligned}\Delta Q&=Q[y_1(x)]-Q[y(x)]=Q[y(x)+\delta y]-Q[y(x)]\\&=\int_a^b[y(x)+\delta y]^2dx-\int_a^b y^2(x)dx\\&=\int_a^b[y^2(x)+2y(x)\delta y+(\delta y)^2]dx-\int_a^b y^2(x)dx\\&=\int_a^b 2y(x)\,\delta y dx+\int_a^b(\delta y)^2dx\end{aligned}$$

在此　　$\delta y=y_1(x)-y(x)$

可见，此泛函Q的增量ΔQ由两项相加而得。将第一项记为

$$\int_a^b 2y(x)\delta y dx=T[y(x)],\delta y]$$

当函数$y(x)$固定时，$T[y(x),\delta y]$是关于δy的线性泛函。这是因为对任何常数C而言，有

$$\begin{aligned}T[y(x),C\delta y]&=\int_a^b 2y(x)C\delta y dx\\&=C\int_a^b 2y\delta y dx=CT[y(x),\delta y]\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}T[y(x),\delta y_1+\delta y_2]&=\int_a^b 2y(x)(\delta y_1+\delta y_2)dx\\&=\int_a^b 2y(x)\delta y_1dx+\int_a^b 2y(x)\delta y_2dx\\&=T[y(x),\delta y_1]+T[y(x),\delta y_2]\end{aligned}$$

我们再来观察第二项$\int_a^b(\delta y)^2dx$。在此$\delta y=y_1(x)-y(x)$，其中

$y(x)$是已给定的函数，$y_1(x)$是任取的函数，$y(x)$及$y_1(x)$均属于$C[a,b]$

$$若 \max_{a\leqslant x\leqslant b} |y_1(x)-y(x)| = \max|\delta y| \longrightarrow 0$$

由

$$\left|\int_a^b (\delta y)^2 dx\right| \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b} (\delta y)^2 (b-a)$$

可知

$$\frac{\int_a^b (\delta y)^2 dx}{\max|\delta y|} \longrightarrow 0$$

这就是说，当$\max|\delta y| \longrightarrow 0$时，$\int_a^b (\delta y)^2 dx$是比$\max|\delta y|$高价的无穷小量，不妨记为

$$\int_a^b (\delta y)^2 dx = 0(\delta y)$$

于是

$$\Delta Q = T[y(x),\delta y] + 0(\delta y)$$

这个公式与（6）式何等相似！它指出一个事实，即泛函$Q[y(x)]=\int_a^b y^2(x)dx$的增量可分解为两部分，第一部分是$\delta y$的线性泛函，第二部分是比$\delta y$更高阶的无穷小量。这种情形与函数增量的状况多么相似！敏悟的读者立刻会想到："这第一部分$T[y(x),\delta y]$是不是泛函Q的变分呢？正是这样！现在我们就来叙述"函数的变分"的定义。

定义 对于泛函$Q[y(x)]$，给$y(x)$以增量δy（即$y(x)$的变分，参看本章§2中的第（4）式），则泛函Q有增量$\Delta Q = Q[y(x)+\delta y]-Q[y(x)]$。如果$\Delta Q$可表为

$$\Delta Q = T[y(x),\delta y] + \beta[y(x),\delta y] \qquad (7)$$

在此，$T[y(x),\delta y]$对δy而言（当$y(x)$给定）是线性泛函而

$$\frac{\beta[y(x),\delta y]}{\max|\delta y|} \to 0 \quad （当y(x)固定，\max|\delta y| \longrightarrow 0）$$

那么，$T[y(x),\delta y]$称为泛函的变分，记作δQ。可见泛函$Q[y$

$(x)]$的变分δQ是Q的增量的“线性主要部分”。初学者应将“泛函的变分”与“函数的微分”这两个定义作仔细的比较，直到您懂得了后者是前者的推广为止。

再举一例。将在$[0,1]$上有定义的函数的集合记作D。任取$y(x)\in D$，$y^2(0)$的值是唯一确定的，所以$Q[y(x)]=y^2(0)$是定义在D上的一个泛函。当$y(x)$取定，求此泛函Q的变分δQ。显然

$$\Delta Q=Q[y(x)+\delta y]-Q[y(x)]=[y(x)+\delta y]^2_{x=0}$$
$$-y^2(0)=y^2(0)+2y(0)\cdot\delta y(0)+[\delta y(0)]^2$$
$$-y^2(0)=2y(0)\delta y(0)+[\delta y(0)]^2$$

在此，$\delta y(0)=\delta y\,|_{x=0}=[y_1(x)-y(x)]_{x=0}$

观察　$\Delta Q=2y(0)\delta y(0)+(\delta y(0))^2$，可以看出

$2y(0)\delta y(0)=T[y(x),\delta y]$是关于$\delta y$的线性泛函，又当$\max|\delta y|\longrightarrow 0$时，

$$\frac{(\delta y(0))^2}{\max|\delta y|}\leqslant\frac{(\max|\delta y|)^2}{\max|\delta y|}=\max|\delta y|\longrightarrow 0$$

可见$2y(0)\delta y(0)$是ΔQ的线性主要部分，也就是Q的变分。即

$$\delta Q=2y(0)\delta y(0)$$

注意，对于函数$u(x)=y^2(x)$，它的微分是

$$du=2y(x)dx$$

此微分式和上面的变分式是多么相似！这使我们想到泛函的变分与函数的导数也许在计算方面有联系。事情果然如此。现在来介绍一条常用的定理。它的大意是：当泛函$Q[y(x)]$的变分存在，这时我们固定$y(x)$和$\delta y=y_1(x)-y(x)$，考虑

$$Q[y(x)+\alpha\delta y]$$

显然，它是变量α的函数，可记为

$$Q[y(x)+\alpha\delta y]=\varphi(\alpha)$$

不但如此，而且函数$\varphi(\alpha)$在$\alpha=0$处的导数$\varphi'(0)$就等于泛函$Q[y(x)]$的变分。现在来证明此定理。

定理　如果泛函$Q[y(x)]$的变分$\delta Q=T[y(x),\delta y]$存在，

那么此变分等于函数$\varphi(\alpha)=Q[y(x)+\alpha\delta y)$的导函数在$\alpha=0$处的值（$y(x)$及$\delta y$均固定）。

证明： 当$y(x)$及δy均固定时，泛函$Q[y(x)+\alpha\delta y]=\varphi(\alpha)$是$\alpha$的函数，且

$$\varphi'(0)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\varphi(\alpha)-\varphi(0)}{\alpha}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{Q[y(x)+\alpha\delta y]-Q[y(x)]}{\alpha}$$

因为泛函$Q[y(x)]$的变分存在，所以

$$Q[y(x)+\delta y]-Q[y(x)]$$
$$=T[y(x),\delta y]+\beta[y(x),\delta y]$$

于是

$$Q[y(x)+\alpha\delta y]-Q[y(x)]$$
$$=T[y(x),\alpha\delta y]+\beta[y(x),\alpha\delta y]$$

当$y(x)$固定，$T[y(x),\delta y]$对δy而言是线性泛函。所以

$$T[y(x),\alpha\delta y]=\alpha T[y(x),\delta y]$$

$$\therefore\quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\varphi(\alpha)-\varphi(0)}{\alpha}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{T[y(x),\alpha\delta y]+\beta[y(x),\alpha\delta y]}{\alpha}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha T[y(x),\delta y]+\beta[y(x),\alpha\delta y]}{\alpha}$$

$$=T[y(x),\delta y]+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x),\alpha\delta y]}{\alpha}$$

但是，由公式（7）可知

$$\frac{\beta[y(x),\delta y]}{\max|\delta y|}\longrightarrow 0\quad（当y(x)固定，\max|\delta y|\longrightarrow 0）$$

$$\therefore\quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x),\alpha\delta y]}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x),\alpha\delta y]}{\max|\delta y|}\cdot\frac{\max|\alpha\delta y|}{\alpha}$$

$$=0^{①}$$

① $\because\ \left|\frac{\max|\alpha\delta y|}{\alpha}\right|=\max|\delta y|$ 有界，且 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x),\alpha\delta y]}{\max|\alpha\delta y|}=0$

$$\therefore \varphi'(0)=T[y(x),\delta y] \qquad (8)$$

5. 泛函的极值

设泛函$Q[y(x)]$在曲线$y(x)$的集合上有定义，曲线$y(x)$均位于平面上的有界区域B内（不妨认为B是矩形），如图1所示。

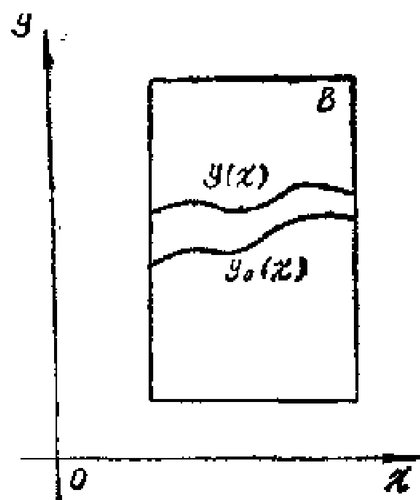


图 1

如果泛函$Q[y(x)]$在任何与$y_0(x)$充分接近的曲线$y(x)$上的值均不大于$Q[y_0(x)]$，亦即泛函的增量

$$\Delta Q=Q[y(x)]-Q[y_0(x)]\leqslant 0$$

时（$y(x)$及$y_0(x)$这些曲线均位于有界区域B内），就说泛函$Q[y(x)]$在曲线$y_0(x)$上取强极大值。关于泛函$Q[y(x)]$在曲线$y_0(x)$上取强极小值，有类似定义。

为了后面的需要，我们还得把"曲线$y_0(x)$的邻域"这一概念介绍一下。我们把适合不等式

$$|y(x)-y_0(x)|\leqslant\varepsilon$$

的一切曲线$y(x)$的集合叫做曲线$y_0(x)$的ε—邻域①。在此我们还加上曲线$y(x)$及$y_0(x)$均连续且均位于有界区域B内的要求。这是"点的邻域"这一概念的推广。于是泛函极值定义可叙述如下：

若在曲线$y_0(x)$的某一个ε-邻域中任取一曲线$y(x)$，总有

$$\Delta Q=Q[y(x)]-Q[y_0(x)]\leqslant 0$$

则称泛函$Q[y(x)]$在曲线$y_0(x)$上取强极大值。类此，有泛函$Q[y(x)]$在曲线$y_0(x)$上取强极小值的定义。

不过，在变分学中用得更多的是另一种曲线邻域概念和以它为基础的另一种泛函极值定义。当曲线$y(x)$属于曲线$y_0(x)$的这种邻域时，不但$y(x)$和$y_0(x)$的值很接近，而且它们的导数值也很接近。具体说来是这样：首先设$y_0(x)$是包含在B域中的C^1类曲线②，凡满足条件

---

①又称为$y_0(x)$的零阶ε—邻域，见下文。

②当$y_0(x)$有1阶连续导数，称$y_0(x)$为C^1类曲线。

1） $|y(x)-y_0(x)|\leqslant\varepsilon$

2） $|y'(x)-y_0'(x)|\leqslant\varepsilon$

3） $y(x)$也是B域内的C^1类曲线

的曲线的集合，叫做曲线$y_0(x)$的 1 阶ε-邻域。

类此，可定义曲线$y_0(x)$的K阶ε-邻域。
而$y_0(x)$的 0 阶ε-邻域即上文中首先说到的那种邻域。

对泛函$Q[y(x)]$来说，如果$Q[y_0(x)]$是$Q[y(x)]$在$y_0(x)$的某个 1 阶ε-邻域中的最大值，则称泛函$Q[y(x)]$在$y_0(x)$取弱极大值。关于泛函$Q[y(x)]$在$y_0(x)$取弱极小值有类似定义。

弱极大值与弱极小值合称"弱极值"。在下文中我们只讨论泛函的弱极值，所以我们以后就把"弱极值"简称为"极值"，这不至于和前面那种强极值定义发生混淆。

说了这么多的定义，应当让读者轻松一下了。还是举个例子。吧。

例 对于泛函$Q[y(x)]=\int_0^1\sqrt{1+y'^2(x)}dx$

在满足$y(0)=0$，$y(1)=1$且有一阶连续导数的函数类中，求使Q取极小值的曲线$y_0(x)$。

熟悉数学分析的读者一望即知$Q[y(x)]=\int_0^1\sqrt{1+y'^2(x)}dx$

是曲线$y(x)$的长度。可见此问题实际上是求过点$A(0,0)$和$B(1,1)$的C^1类曲线中最短的一条，显然$y_0(x)$是连接A、B两点的直线段。$y_0(x)$的表达式请您自己写出来吧。

也许您还不满意，还要求不用这种几何方法来解决问题。这种想法很好，因为一般说来，随便取一个泛函$Q[y(x)]$，未必有明显的几何意义。那么，如何求解极值问题呢？办法在以下各节中介绍。

§ 3 最简单泛函的尤拉方程

尤拉方程是变分法中的基本方程。在本节中我们对形如

$$Q[y(x)]=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$$

的泛函（把它叫做最简单泛函）来导出此方程。

1. 预备定理

预备定理 如果函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx=0 \tag{9}$$

对任何具有如下性质的函数 $\eta(x)$ 成立，这些性质是：

1） $\eta(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数；

2） $\eta(a)=0=\eta(b)$；

3） $|\eta(x)|<\varepsilon$（ε 是任意给定的正数）。

那么，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为零。

证明 若有 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)>0$，就会得到矛盾。论证方法是这样的：因为 $f(x)$ 在 x_0 点连续，所以有正数 δ 存在，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>0$ 成立。现在作函数 $\psi(x)$，使它满足

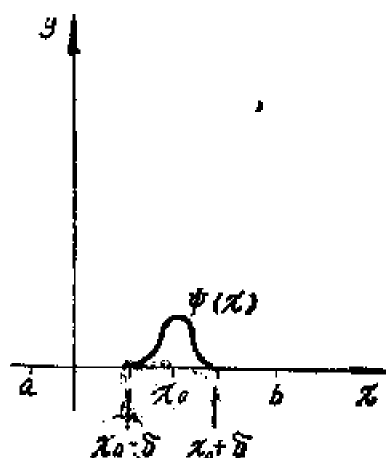


图 2

1） 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，$\psi(x)>0$；

2） 当 $x\in[a,x_0-\delta]$ 或 $x\in[x_0+\delta,b]$ 时，$\psi(x)=0$；

3） $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数。

$\psi(x)$ 的图象如图 2 所示。观此图可以想见这种函数 $\psi(x)$ 是可以作出的，而且是很多的（关于这一点的详细叙述见下一节）。又取 $\eta(x)=A\psi(x)$，显然 $\eta(x)$ 也具有上述三条性质，且对任何 $\varepsilon>0$ 而言，只要适当选取常数 A，就可使 $|\eta(x)|<\varepsilon$。对于这种 $\eta(x)$，积分

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\eta(x)dx>0$$

这与(9)式发生矛盾。所以，当 $x\in(a,b)$，$f(x)$ 不大于零。同法可以证明，当 $x\in(a,b)$，$f(x)$ 不小于零。可见当 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)\equiv 0$。又 $f(x)$ 在 $x=a,b$ 处都连续，所以 $f(a)=0$

$=f(b)$。于是，当$x\in[a,b]$，

$$f(x)\equiv 0$$

证毕。

2. 预备定理的精确论证

细心的读者会发现，上面的论证还有不严格之处。那就是函数$\psi(x)$的作法。您说从图象可以想见这种$\psi(x)$是很多的，我就不信，请您拿出一个满足那么多条件的$\psi(x)$给我看一看！这种说法不是故意抬杠，而是表现了一种科学精神。在本节中，我们来答复这个问题。本来，我们只要作出一个满足上一节中所说的三个条件的函数$\psi(x)$就行了。一般的变分法教本差不多都是这样做的。但是，在本节我们将作出满足更多条件的函数$\psi(x)$来！这种$\psi(x)$不仅满足上述三个条件，而且还有任意阶连续导数。它在现代数学舞台上扮演着一个颇重要的角色。如果您今后攻读“广义函数”、“有限元理论”这些正在蓬勃发展的现代理论，您经常会碰见一个函数，它的表达式是

$$\psi(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{(x-x_0)^2-\delta^2}} & \text{当} x\in(x_0-\delta,x_0+\delta) \\ 0 & \text{当} x\in(a,x_0-\delta)\text{或} x\in(x_0+\delta,b) \end{cases}$$

当代的数学家们常常称此函数为“软化子”（Mollifer），许多文献中经常引用它的有关性质。此函数恰好适合我们的需要。现在就来证明它满足上节中提到的三个条件。条件 1）和条件2)明显成立。只须验证条件 3）成立，即证明此$\psi(x)$在$[a,b]$上有连续导数。显然只须证明导数$\psi'(x)$在$x_0+\delta$及$x_0-\delta$处连续就行了。现在只验证$\psi'(x)$在$x_0+\delta$处连续（在$x_0-\delta$处的验证方法相同)。于是，问题归结为

a）求出导数$\psi'(x_0+\delta)$；

b）证明$\lim\limits_{x\to x_0+\delta}\psi'(x)=\psi'(x_0+\delta)$。

现在来求$\psi'(x_0+\delta)$

∵ 当$x\geqslant x_0+\delta$时，$\psi(x)\equiv 0$

$$\therefore \lim_{x \to x_0+\delta+0} \frac{\psi(x)-\psi(x_0+\delta)}{x-(x_0+\delta)} = 0$$

即$\psi(x)$在点$x_0+\delta$处的右导数

$$\psi'_+(x_0+\delta) = 0$$

再求左导数$\psi'_-(x_0+\delta)$

$$\lim_{x \to x_0+\delta-0} \frac{\psi(x)-\psi(x_0+\delta)}{x-(x_0+\delta)} = \lim_{x \to x_0+\delta-0} \frac{e^{\frac{1}{(x-x_0)^2-\delta^2}}}{x-x_0-\delta}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{e^t}{(\delta^2+\frac{1}{t})^{\frac{1}{2}}-\delta} \quad (令\frac{1}{(x-x_0)^2-\delta^2}=t)$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{e^t}{\frac{1}{2}(\delta^2+\frac{1}{t})^{-\frac{1}{2}}(-\frac{1}{t^2})} \quad (在此用了L'Hospital法则)$$

$$= \lim_{t \to -\infty} (-2)e^t t^2 \sqrt{\delta^2+\frac{1}{t}}$$

$$\because \lim_{t \to -\infty} \sqrt{\delta^2+\frac{1}{t}} = \delta$$

$$\lim_{t \to -\infty} e^t t^2 = \lim_{t \to -\infty} \frac{t^2}{e^{-t}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{2t}{-e^{-t}}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{2}{e^{-t}} = 0$$

$$\therefore \lim_{t \to 0} (-2)e^t t^2 \sqrt{\delta^2+\frac{1}{t}} = 0$$

$$\therefore \psi'_-(x_0+\delta) = 0$$

于是 $$\psi'(x_0+\delta) = 0$$

还要证明

$$\lim_{x \to x_0+\delta} \psi'(x) = 0$$

先求右极限。因为当$x > x_0+\delta$时$\psi(x) \equiv 0$，所以当$x > x_0+\delta$时，$\psi'(x) \equiv 0$。于是

$$\lim_{x \to x_0+\delta+0} \psi'(x) = 0$$

再求左极限。

当$x<x_0+\delta$时

$$\psi'(x)=\left[e^{\frac{1}{(x-x_0)^2-\delta^2}}\right]'=e^{\frac{1}{(x-x_0)^2-\delta^2}}\cdot\frac{-2(x-x_0)}{[(x-x_0)^2-\delta^2]^2}$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0+\delta-0}\psi'(x)=\lim_{x\to x_0+\delta-0}e^{\frac{1}{(x-x_0)^2-\delta^2}}\cdot\frac{-2(x-x_0)}{[(x-x_0)^2-\delta^2]^2}$$

$$=\lim_{t\to-\infty}-e^{t}\frac{2\sqrt{\delta^2+\frac{1}{t}}}{\frac{1}{t^2}}\left(仍取\frac{1}{(x-x_0)^2-\delta^2}=t\right)$$

$$=\lim_{t\to-\infty}-2t^2e^t\sqrt{\delta^2+\frac{1}{t}}=0$$

可见$\psi'(x)$在点$x_0+\delta$处的左右极限都是零。于是

$$\lim_{x\to x_0+\delta}\psi'(x)=0=\psi'(x_0+\delta)$$

所以$\psi'(x)$在点$x_0+\delta$处连续。同理可知$\psi'(x)$在$x_0-\delta$处亦连续。验证已毕。

我们已证明$\psi(x)$在$[a,b]$上有一阶连续导数，用数学界常用的话来说就是："$\psi(x)$在$[a,b]$上具有一阶光滑程度"。现在我们还要指出一点：使用刚才的论证方法，可以证明$\psi^{(k)}(x)$在$x_0\pm\delta$这两点连续，而$\psi^{(k)}(x)$在区间$[a,b]$上其余点显然连续，于是函数$\psi(x)$在$[a,b]$上有任意阶连续导数。我们说这种函数在$[a,b]$上有"无穷阶"的光滑程度，这是把$\psi(x)$称为"软化子"的原因之一（更重要的原因这里不讲了）。

我们现在不但填补了预备定理的证明中的漏洞，而且由于$\psi(x)$有任意阶连续导数，所以我们实际上得到了比原来更强的结果。说清楚些，我们得到了：

推广的预备定理　如果函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，又

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0$$

对任何具有如下性质的函数$\eta(x)$成立，这些性质是：

1）$\eta(x)$在$[a,b]$上有n阶连续导数（n为任何给定的非负整数）。①

2）$\eta(a)=0=\eta(b)$

3）$|\eta(x)|<\varepsilon$（ε为任意给定的整数）

那么，函数$y=f(x)$在$[a,b]$上恒为零。

请注意，在这里若$n=1$，就是原来的预备定理。

3． 最简单泛函的尤拉方程

现在转入正题。我们来研究形如

$$Q[y(x)]=\int_a^b F[x,y(x),y'(x)]dx$$

的泛函，看看它在什么样的曲线$y(x)$上取极值。

说得更清楚一些就是：在具有下列性质的函数$y(x)$的集合D中求函数$y_0(x)$，使泛函$Q[y(x)]$在$y_0(x)$上取极值。这些性质是：

1）$y(x)\in C^1[a,b]$②；

2）$y(a)=y_0$，$y(b)=y_1$（y_0,y_1是任意给定的数）

3）$y(x)$曲线位于平面上的有界区域R内。

读者还记得微分学中关于函数极值的费马定理吧。此定理指出：若函数$y=f(x)$在$[a,b]$的某内点x_0处取极值，且$f'(x_0)$存在，则$f'(x_0)=0$。这是函数在内点存在极值的必要条件（当导数存在）。这种使导数为零的点叫做函数的驻点。

也许您读到这里时会提出一个问题：“既然泛函是函数概念的推广，泛函的变分是函数的微分的推广，而泛函极值又是函数极值概念的推广，那么，费马定理为什么不可以推广呢”？如果

---

① 我们规定$\eta(x)$的零阶导函数即$\eta(x)$本身。

② 我们把在$[a,b]$上有1阶连续导数的函数的集合，记作$C^1[a,b]$。$C^k[a,b]$的含义类此。当$k=0$，$C^0[a,b]$即$C[a,b]$。

您这样想的话，我敢说您在数学上有相当强的想象力！但是我还要反问一句："您打算怎样推广费马定理呢"？

"既然函数$f(x)$在内点x_0处取极值，则在该点的导数（如果存在的话）为零，那么当泛函$Q[y(x)]$在曲线$y_0(x)$上取极值，$Q[y(x)]$在$y_0(x)$的变分（如果存在）也应该是零了"。

您真是"不鸣则已，一鸣惊人"！由这个想法就可以导出那著名的尤拉方程来。下面我们来详细地谈这个问题。

定理 设$F(x, y, y')$是三个变量的连续函数，且当点(x,y)在平面上的某个有界域B内，而y'取任何值时，$F(x,y,y')$及其直到二阶的偏导数（指对变量x,y及y'的偏导数）均连续。若在满足

1）$y(x)\in C^1[a,b]$

2）$y(a)=y_0$，$y(b)=y_1$

3）$y(x)$曲线位于平面上的有界区域B内的函数集合中，泛函$Q[y(x)]$在某一条确定的曲线$y(x)$上取极值，且此曲线$y(x)$在$[a,b]$有二阶连续导数，那么函数$y(x)$满足微分方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

（在此，所谓$Q[y(x)]$在$y(x)$取极值是指取弱极值，也就是说$Q[y(x)]$在$y(x)$的某个1阶ε-邻域中取最大值或最小值。参看第二章§2中第5节）。

证明 既然泛函$Q[y(x)$在曲线$y(x)$上取极值，所以当$y_1(x)$是$y(x)$的某个1阶ε-邻域中的曲线，则$Q[y_1(x)]\geqslant$（或$\leqslant$）$Q[y(x)]$。所谓"$y_1(x)$在$y(x)$的1阶ε-邻域中"，指$y_1(x)$满足

$$|y_1(x)-y(x)|\leqslant\varepsilon$$
$$|y_1'(x)-y'(x)|\leqslant\varepsilon \qquad (\text{当 } x\in[a,b])$$
$$y_1(x)\in C^1[a,b]$$

现在，任取一个函数$\eta(x)$，使

1）$\eta(x)\in C^1[a,b]$

2） $\eta(a)=0=\eta(b)$

于是，当 $|\alpha|$ 充分小时，曲线 $y_1(x)=y(x)+\alpha\eta(x)$ 在 $y(x)$ 的 1 阶 ε-邻域之内。

事实上，当 $|\alpha|$ 充分小时，

$$|y_1(x)-y(x)|=|\alpha\eta(x)|\leqslant\varepsilon$$

$$|y_1'(x)-y'(x)|=|\alpha\eta'(x)|\leqslant\varepsilon$$

现在，$y(x)$ 及 $\eta(x)$ 均已给定，

于是泛函 $Q[y(x)+\alpha\eta(x)]$ 显然是变量 α 的函数，可记为

$$Q[y(x)+\alpha\eta(x)]=\psi(\alpha)$$

当 $\alpha=0$ 时

$$\psi(0)=Q[y(x)]$$

取极值。这就是说，函数 $\psi(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 处取极值。由费马定理可知，若 $\psi'(0)$ 存在，则

$$\psi'(0)=0$$ ①

但是

$$\psi'(0)=\psi'(\alpha)\Big|_{\alpha=0}=\left\{\frac{d}{d\alpha}\int_a^b F[x,y(x)+\alpha\eta(x),y'(x)+\alpha\eta'(x)]dx\right\}_{\alpha=0}$$

$$=\int_a^b\left[F_y\frac{d}{d\alpha}(y+\alpha\eta)+F_{y'}\frac{d}{d\alpha}(y'+\alpha\eta')\right]_{\alpha=0}dx$$

$$=\int_a^b[F_y\eta(x)+F_{y'}\eta'(x)]dx$$

$$=\int_a^b F_y\eta(x)dx+F_{y'}\eta(x)\Big|_a^b-\int_a^b\eta(x)\frac{d}{dx}(Fy')dx$$

$$=\int_a^b\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta(x)dx\quad(\because\eta(a)=0=\eta(b))$$

所以 $\varphi'(0)$ 存在。于是 $\varphi'(0)=0$，即

---

① 一般的书上都是这样讲的。但是作者认为还应当作如下说明：可以看出 $\alpha=0$ 是函数 $\varphi(\alpha)$ 的定义域的内点。事实上，若 α 比 0 略小一些，曲线 $y(x)+\alpha\eta(x)$ 在 $y(x)$ 的一阶 ε-邻域之内。所以当 α 略小于 0 时，$\varphi(\alpha)$ 有定义。同理，当 α 略大于 0 时，$\varphi(\alpha)$ 有定义。所以 $\alpha=0$ 是定义域的内点。

$$\int_a^b (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\eta(x)dx = 0。$$

按假设，$y(x)$有二阶连续导数，所以

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) = \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y') = F_{y'x} + F_{y'y}y' + F_{y'y'}y''$$

可见$\frac{d}{dx}F_{y'}$存在而且连续。于是$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}$是连续函数，而$\eta(x)$是满足条件

1）$\eta(x)$在$[a,b]$上有连续导数

2）$\eta(a) = 0 = \eta(b)$

的任何函数。由本章§3中的预备定理①可知

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \qquad (10)$$

这就是著名的尤拉(Euler)方程。证毕。

这个定理中有一个条件显得不自然，就是要求泛函$Q[y(x)]$在具有二阶连续导数的曲线$y(x)$上取极值。我们说$Q[y(x)]$在$y(x)$上取极值，是指取弱极值。也就是和曲线$y(x)$的某个1阶ε-邻域中的C^1类曲线相比较，泛函Q在$y(x)$上取极值。您想一下，在$y(x)$的邻域中的那些曲线都只要求是C^1类的，独有$y(x)$本身却要求是C^2类的，这就显得不协调！重要的数学定理往往具有内在的和谐性。许多人记得大诗人杜甫的警句："二句三年得，一吟双泪流"！但人们往往不知道数学家不把数学定理琢磨到十分完美的程度是不会罢休的。后来，终于证明了：对于泛函

$Q[y(x)] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]dx$，若

1）$F(x,y,y')$对x,y及y'三个变量的二阶偏导数都连续，

2）$F_{y'y'} \neq 0$，

3）$Q[y(x)]$在C^1类曲线$y(x)$上取极值，

则此$y(x)$有二阶连续导数。这个定理证明从略。但是由此可知，

① 这里$\eta(x)$所满足的条件，比§3的预备定理中的条件少一条。对$\eta(x)$要求的条件越少，这种$\eta(x)$就越多，预备定理的结论更能成立。

只要$F_{y'y'}\neq 0$，可以取消定理中$y(x)$是C^2类曲线这一条假设，这就自然得多了！

我们把满足尤拉方程(10)的函数叫做“泛函Q的极带”。[①]“极带”这一概念与分析中的“驻点”相当。对于函数$\varphi(x)$而言，若$\varphi'(x_0)=0$，则称x_0为$\varphi(x)$的驻点。在“驻点”函数$\varphi(x)$不一定取极值；同样，在“极带”$y(x)$上泛函$Q[y(x)]$也不一定取极值。但是，在一定条件下（参看本节的定理）若泛函

$Q[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')dx$在曲线$y(x)$上取极值，则$y(x)$是极带。

现在来举一些例子。

例 1　求泛函$Q[y(x)]=\int_a^b(-2xy'+y'^2)dx$的极带

解： $\because F(x,y,y')=-2xy'+y'^2$

$\therefore F_y=0$

$F_{y'}=-2x+2y'$

$\frac{d}{dx}Fy'=-2+2y''$

于是，尤拉方程（10）即

$$-2+2y''=0$$

所以极带为

$$y(x)=\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2 \quad (C_1\text{及}C_2\text{为任意常数})$$

例 2　求泛函$Q[y(x)]=\int_0^1(x^2y+y'^2)dx$的满足$y(0)=0$，$y(1)=\frac{1}{3}$的极带。

解： $\because F(x,y,y')=x^2y+y'^2$

$\therefore F_y=x^2$

① 有些书上把满足尤拉方程的函数称为泛函的“极值曲线”，这样容易使初学者误认为在这种曲线上泛函一定取极值。所以在本书中采用“极带”一词，引自斯米尔若夫所著《高等数学教程》第4卷1分册中译本p.210。

$$\frac{d}{dx}F_{y'}=\frac{d}{dx}(2y')=2y''$$

于是，尤拉方程为

$$x^2-2y''=0$$

它的通解是

$$y(x)=\frac{1}{24}x^4+C_1x+C_2$$

又$y(0)=C_2=0$

$$y(1)=\frac{1}{24}+C_1+C_2=\frac{1}{3}$$

$\therefore C_2=0$，$C_1=\frac{7}{24}$　　泛函的极带为

$$y(x)=\frac{1}{24}x^4+\frac{7}{24}x$$

例 3　求泛函$Q[y(x)]=\int_0^1 y^2dx$的极带

解： $\because F(x,y,y')=y^2$

$\therefore Fy'=0$

于是尤拉方程为

$$F_y=0$$

但

$$F_y=2y$$

$$\therefore y=0$$

极带是函数　$y=0$（显然泛函$Q[y(x)]=\int_0^1 y^2dx$在曲线$y(x)=0$上取最小值）。

这个例子告诉我们，若$F(x,y,y')$中不含y'，则尤拉方程化为

$$F_y(x,y)=0$$

之形，这已经不是微分方程了（经常有人说"尤拉方程是微分方程"，这句话是有毛病的），所以它的解不含任意常数。在这种情形下，尤拉方程的解往往是一条或几条曲线，因此不能再要求

它满足任意给定的边界条件

$$y(a)=C_0 \quad 及 y(b)=C_1$$

了。

现在，我们再来研究在本章§2中所提到的泛函$Q[y(x)]=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}dx$（还要求$y(0)=0$，$y(1)=1$)的极值问题吧。当时借助于几何直观看出$Q[y(x)]$在过$A(0,0)$和$B(1,1)$两点的直线上取最小值。现在，我们用尤拉的办法，看看结果如何。

$$\because F(x,y,y')=\sqrt{1+y'^2}$$

$$\therefore F_y=0$$

$$F_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

尤拉方程化为

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0$$

$$\therefore \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C \quad （C为任意常数）$$

$$y'=C\sqrt{1+y'^2}$$

$$y'^2(1-C^2)=C^2$$

由此式可见$C^2\neq 1$

$$\therefore y'=\pm\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}$$

即$y'=D$（D亦任意常数。由此式已经看出$y(x)$是直线)。

$$\therefore y(x)=Dx+E$$

$$又 y(0)=E=0$$

$$y(1)=D+E=1$$

$\therefore Q[y(x)]$的满足$y(0)=0$，$y(1)=1$的极带是直线$y=x$。

现在用尤拉方程来解决变分学史上最著名的问题，即约翰·贝努里在1696年提出的“最速降线问题”。

最速降线问题的提法是这样：设平面V与地平面垂直，A和

B是此平面上任取的两点，A点的位置高于B点。质点M在重力作用下沿曲线$\overset{\frown}{AB}$由A点降落到B点，所需时间为T。向$\overset{\frown}{AB}$是什么曲线时，时间T的值最小（设质点在A点处的初速为零）？这里需加说明，A点当然不取在B点的正上方，因为那样问题就太简单了。

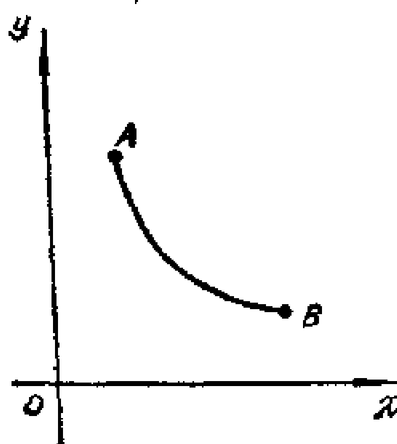


图 3

解法：取坐标系如图3，记质点的质量为m，速度为v，又时间为t，则

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy$$

$$\therefore v=\sqrt{2gy}$$

曲线$y=y(x)$的弧长微分是

$$dS=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

又
$$\frac{dS}{dt}=v$$

$$\therefore dt=\frac{dS}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{\sqrt{2gy}}$$

$$\therefore T=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2g}}Q[y(x)]$$

由此可见，只须求出函数$y=y(x)$，使泛函

$$Q[y(x)]=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx$$

在此曲线$y(x)$上取极小值即可。现在写出尤拉方程

$$\because F(x,y,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

$$\therefore F_y=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-\frac{3}{2}}$$

$$F_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$$

$$\therefore -\frac{1}{2}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}=\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right]$$

此方程很难直接求解，要另想办法。

因为 $F=F(y,y')$，所以

$$F_{y'}=F_{y'}(y,y')$$

$$\frac{d}{dx}F_{y'}=F_{y'y}y'+F_{y'y'}y''$$

于是尤拉方程可表为

$$F_y-F_{y'y}y'-F_{y'y'}y''=0$$

现在可以证明

$$F-y'F_{y'}=C\qquad (C\text{为任意常数})$$

事实上

$$\frac{d}{dx}[F-y'F_{y'}]=F_yy'+F_{y'}y''-y''F_{y'}$$

$$-y'(F_{y'y}y'+F_{y'y'}y'')$$

$$=y'[F_y-F_{y'y}y'-F_{y'y'}y'']=0$$

$$\therefore\quad F-y'F_{y'}=C$$

将 $F=\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{y}}$ 代入此式，得

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C$$

$$\therefore y(1+y'^2)=D\qquad (D\text{亦任意常数})$$

令 $y'=\text{tg}\theta$，则

$$y=\frac{D}{1+\text{tg}^2\theta}=D\cos^2\theta=\frac{D}{2}(1+\cos2\theta)$$

$$dy=-D\sin2\theta d\theta$$

又 $dx=\dfrac{dy}{y'}=\dfrac{-D\sin2\theta d\theta}{\text{tg}\theta}=\dfrac{-2D\sin\theta\cos\theta d\theta}{\text{tg}\theta}$

$$=-D(1+\cos2\theta)d\theta$$

$$\therefore \begin{cases} x = -D\theta - \dfrac{D}{2}\sin 2\theta + E & \text{（}E\text{亦任意常数）} \\ y = \dfrac{D}{2}(1 + \cos 2\theta) \end{cases}$$

这就是尤拉方程的解。

令$2\theta = \pi - \varphi$，则以上二式化为

$$\begin{cases} x = \dfrac{D}{2}(\varphi - \sin\varphi) - \dfrac{\pi}{2}D + E \\ y = \dfrac{D}{2}(1 - \cos\varphi) \end{cases}$$

又当$\varphi = 0$时，取$x = 0 = y$，于是

$$x = r(\varphi - \sin\varphi)$$

$$y = r(1 - \cos\varphi) \quad \left(r = \frac{D}{2}\right)$$

所以泛函$Q = \int_0^{x_B} \sqrt{\dfrac{1 + y'^2}{y}}\, dx$的极带是旋轮线(也称摆线)。可以证明泛函$Q$在过$A$、$B$两点的旋轮线上确实取最小值，这一点我们不讲了。

经过这一番探索，我们才知道过A、B两点的“最速降线”竟是一条旋轮线!

在本节的最后，我们来介绍更便于运算的变分记号。

我们将泛函$Q[y(x)]$的变分记作δQ，函数$y(x)$的变分记作δy（见本章§2的第(4)式和第(7)式）。于是

$$T(y, \delta y) = \delta Q$$

又　$\delta Q = \varphi'(0)$　（见第(8)式）

在此　$\varphi(\alpha) = Q[y + \alpha\delta y]$

$$\varphi'(0) = \int_a^b [F_y \delta y + F_{y'}(\delta y)']dx \qquad \text{（见p.20）}$$

而　$(\delta y)' = \delta y'$①

---

① $\delta y = \overline{x}(x) - y(x)$　　$(\delta y)' = \overline{y'}(x) - y'(x) = \delta y'$

$$\therefore \quad \delta Q = \delta\int_a^b F(x,y,y')dx$$

$$=\int_a^b [F_y\delta y + F_{y'}\delta y']dx \tag{11}$$

请仔细观察（11）式。它说明对于形如$\int_a^b F(x,y,y')dx$的泛函 Q，我们计算变分δQ，就像计算函数的微分一样①。

于是，由$\delta Q=0$，得

$$\int_a^b (F_y\delta y + F_{y'}\delta y')dx = 0$$

又 $\int_a^b F_{y'}\delta y'dx = \int_a^b F_{y'}d(\delta y)$

$$= \delta y F_{y'}\Big|_a^b - \int_a^b \delta y\left(\frac{d}{dx}F_{y'}\right)dx$$

$$= -\int_a^b \delta y\left(\frac{d}{dx}F_{y'}\right)dx$$

$$\therefore \int_a^b\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y = 0$$

但δy是可在相当广泛的函数类中任取的函数（详情见本节上文），所以

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

这样来推导尤拉方程，书写方式简洁多了。今后我们将用这种办法导出各种泛函的尤拉方程。

还要说明一点，在这种推导过程中，我们用到了

$$d(\delta y) = \delta(dy) \tag{12}$$

即微分符号d与变分符号δ可以互换。事实上

$$d(\delta y) = (\delta y)'dx = (\delta y')dx = \delta(y'dx) = \delta(dy)$$

所以（12）式成立。这种互换法则给变分计算带来很大的便利。

---

① 对于函数$F(x,y(\alpha),y'(\alpha))$，$\alpha$是参变量。当$x$固定而$\alpha$变化，则$dF=F_ydy+F_{y'}dy'$

§4 关于$\int_a^b F(x,y,y',y''\cdots,y^{(n)})dx$型泛函的尤拉方程

在上文中，对于形如$Q[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')dx$的泛函推导了尤拉方程。我们详述了有关条件，作了相当严格的论证。现在，我们将采用上节最后所说的方法来导出泛函$Q[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y,'\cdots,y^{(n)})dx$的尤拉方程。对于各种条件只作大略叙述，读者可以自已补足这些条件。只要懂得了前面几节的内容，要详细论证后文中的结果是并不困难的。因为主要的难点已经突破，下面这几节都是推广罢了。

首先还是针对较近的目标吧！我们来推导形如$Q[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y',y'')dx$的泛函的尤拉方程。

设函数$F(x,y,y',y'')$充分光滑①，当泛函Q在曲线$y(x)$上取极值②则变分

$$\delta Q=0$$

但是

$$\delta Q=\int_a^b (F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+F_{y''}\delta y'')dx$$

（与（11）式对比）

在上节中已指出

$$\int_a^b F_{y'}\delta y'dx=-\int_a^b \delta y\frac{d}{dx}(F_{y'})dx$$

又

---

① 指$F(x,y,y',y'')$有对x,y,y',y''的充分高阶的连续偏导数。其充分光滑程度足以保证以下各种运算顺利进行。

② 指$Q[y(x)]$在满足边值条件$y(a)=y_0,y'(a)=y_0',\ y(b)=y_1,\ y'(b)=y_1'$且充分光滑的函数类中取弱极值。

$$\int_a^b F_{y''}\delta y''dx=\int_a^b F_{y''}\frac{d}{dx}(\delta_{y'})dx$$

$$=\delta y' F_{y''}\Big|_a^b-\int_a^b\delta y'\frac{d}{dx}(F_{y''})dx$$

$$=-\int_a^b\delta y'\frac{d}{dx}(F_{y''})dx$$

（注意$\delta y'(a)=0=\delta y'(b)$）

$$=-\int_a^b\frac{d}{dx}(\delta y)\cdot\left(\frac{d}{dx}F_{y''}\right)dx$$

$$=-\delta y\cdot\frac{d}{dx}(F_{y''})\Big|_a^b+$$

$$\int_a^b\delta y\cdot\frac{d^2}{dx^2}(F_{y''})dx$$

$$=\int_a^b\delta y\frac{d^2}{dx^2}(F_{y''})dx$$

$$\therefore \delta Q=\int_a^b\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\right)\delta y=0$$

和§3中所说的情形类似，因为δy可在相当广泛的函数类中任意选取，而$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}$又是$x$的连续函数（当$y(x)$取定——我们设$Q[y(x)]$在$y(x)$上取极值），所以

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=0 \text{①} \tag{13}$$

这就是泛函$Q[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y',y'')dx$的尤拉方程。当泛函$Q$在曲线$y(x)$上取极值，且$F(x,y,y',y'')$及曲线$y(x)$充分光滑，则$y(x)$满足方程（13）。

一般说来，用这种论证方法可以证明：对于泛函$Q[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})dx$，设$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})$对$y,y',y'',\cdots,y^{(n)}$而言有充分高阶的连续偏导数（或说$F$充分光

① 可参看本章§2中的“推广了的预备定理”。

滑)。若泛函Q在曲线$y(x)$上取极值①,则$y(x)$满足如下尤拉方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}$$
$$-\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0 \qquad (13)'$$

此方程又称尤拉—泊松方程。由

$$\delta Q=\int_a^b[F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+F_{y''}\delta y''$$
$$+\cdots+F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)}]dx=0$$

再作若干次分部积分，并利用

$$\delta y(a)=0=\delta y'(a)=\cdots=\delta y^{(n-1)}(a)$$
$$\delta y(b)=0=\delta y'(b)=\cdots=\delta y^{(n-1)}(b)$$

即可证明（13）式。请读者自己作出证明。

§5 关于$\int_a^b F[x,y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x),y_1'(x),y_2'(x),\cdots,y_n'(x)]dx$型泛函的尤拉方程

现在，我们的叙述可以更简练一些了，这样读者反而容易理解证明的指导思想。

对于形如$Q[y_1(x),\cdots,y_n(x)]=\int_a^b F(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')dx$的泛函，设$F(x,y_1,\cdots,y_n,y_1'\cdots y_n')$对$y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots y_n'$而言充分光滑。若泛函$Q$在函数组$y_1(x),\cdots,y_n(x)$上取极值（指$Q[y_1,\cdots,y_n]$在满足给定边值且充分光滑的函数组的集合中取弱极值），则$y_i(x)$满足尤拉方程组

① 指$Q[y(x)]$在满足边值条件

$$\begin{cases} y^{(k)}(a)=c_k & (k=0,1,\cdots,n-1 \\ y^{(k)}(b)=e_k & (y^{(0)}\text{即}y) \end{cases}$$

且充分光滑的函数类中取弱极值。

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{14}$$

证： $\because \delta Q=0$ 又

$$\delta Q=\int_a^b\Big(F_{y_1}\delta y_1+F_{y_2}\delta y_2+\cdots+F_{y_n}\delta y_n$$

$$+F_{y_1'}\delta y_1'+F_{y_2'}\delta y_2'+\cdots+F_{y_n'}\delta y_n'\Big)dx$$

但 $\displaystyle\int_a^b F_{y_i'}\delta y_i'dx=\delta y_i\cdot F_{y_i}\Big|_a^b-\int_a^b\delta y_i\Big(\frac{d}{dx}F_{y_i'}\Big)dx$

$$=-\int_a^b\delta y_i\Big(\frac{d}{dx}F_{y_i'}\Big)dx$$

$\therefore$ $\displaystyle\delta Q=\int_a^b\Big[\Big(F_{y_1}-\frac{d}{dx}F_{y_1'}\Big)\delta y_1+\Big(F_{y_2}$

$$-\frac{d}{dx}F_{y_2'}\Big)\delta y_2+\cdots+\Big(F_{y_n}$$

$$-\frac{d}{dx}F_{y_n'}\Big)\delta y_n\Big]dx=0$$

δy_i（$i=1,2,\cdots,n$）可在相当广泛的函数类中任意选取。可取$\delta y_2=0=\delta y_3=\cdots=\delta y_n$，这时

$$\int_a^b\Big(F_{y_1}-\frac{d}{dx}F_{y_1'}\Big)\delta y_1=0$$

由δy_1的任意性及$F_{y_1}-\dfrac{d}{dx}F_{y_1'}$的连续性，得

$$F_{y_1}-\frac{d}{dx}F_{y_1'}=0$$

其余各方程的证明同比。

§6 多元函数的泛函及其尤拉方程

1. 多元函数的泛函

前面所说的$Q[y(x)]$是依赖于一元函数$y(x)$的泛函。现在来研究依赖于多元函数的泛函。

我们来看重积分

$$\iint\limits_D Z(x,y)dxdy = Q[Z(x,y)]$$

在此，积分区域D是由不等式$\begin{matrix} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \end{matrix}$所界定的正方形，$Z(x,y)$是定义于$D$上的二元连续函数。把在$D$上连续的二元函数的集合记作$C(D)$。任取$z(x,y) \in C(D)$，$Q$的值唯一确定，所以$Q[z(x,y)]$是依赖于$z(x,y)$的泛函。

再看一例。对于$Q[z(x, y)] = \operatorname*{Sup}\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1}} Z(x, y)$①，将在域$G\left(\begin{matrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \end{matrix}\right)$上的有界函数的集合记作$M(G)$，对于任取的$Z(x,y) \in M(G)$，$Q[Z(x, y)]$值唯一确定，所以$Q$是依赖于$Z(x,y)$的泛函。

以上是依赖于多元函数的泛函的例子，至于一般定义，就不必说了。

2. $\iint\limits_D F\left[x, y, z(xy), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right]dxdy$型泛函的尤拉方程

现在我们来研究泛函

$$Q[z(x,y)] = \iint\limits_D F\left[x, y, z(x,y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right]dxdy$$

在此，设D是平面上的有界闭区域，且D的边界曲线∂D②是光滑的。考虑在区域D上有一阶连续偏导数的函数。把这种函数的集合记作$C^1(D)$。又在区域D的边界∂D上给定一函数$\varphi(x,y)$。把$C^1(D)$中满足边值条件$z(x,y)|_{\partial D} = \varphi(x,y)$的函数$z(x,y)$的集合记作$R^1(D)$。即

$R^1(D) = \{z(x,y);\ z(x,y) \in C^1(D),\ z(x,y)|_{\partial D}$

① Sup表示数的集合的上确界，也就是数集的最小的上界。

② 在现代数学文献中，常把区域D的边界记作∂D，这种记号来源于拓扑学。

$=\varphi(x,y)\}$

设泛函$Q[z(x,y)]=\iint\limits_D F\left[x,y,z(x,y),\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right]dxdy$

在$R^1(D)$中的函数$z(x,y)$上取极值。任取$\bar{z}(x,y)\in R^1(D)$，令

$$\delta z=\bar{z}(x,y)-z(x,y)$$

这是函数$z(x,y)$的变分。显然

$$\begin{aligned}\delta z|_{\partial D}&=[\bar{z}(x,y)-z(x,y)]|_{\partial D}\\&=\varphi(x,y)-\varphi(x,y)\\&=0\end{aligned}$$

即在边界∂D上，函数的变分为零。又记

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=q$$

则

$$\frac{\partial(\delta z)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\bar{z}-z)=\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}=\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\delta p$$

（注意$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}$是函数$\frac{\partial z}{\partial x}$的变分）

同理

$$\frac{\partial(\delta z)}{\partial y}=\delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\delta q$$

当$z(x,y)$及δz给定时，泛函$Q[z+\alpha\cdot\delta z]$显然是α的函数，记作

$$\varphi(\alpha)=Q[z+\alpha\cdot\delta z]$$

因为泛函Q在$z(x,y)$上取极值，所以函数$\varphi(\alpha)$在$\alpha=0$处取极值（参看本章§3），于是

$$\varphi'(0)=0$$

但是 $Q[z(x,y)]=\iint\limits_D F(x,y,z,p,q)dxdy$

以$z+\alpha\cdot\delta z$取代z时，p由$p+\alpha\cdot\delta p$取代，q由$q+\alpha\cdot\delta q$取代。

所以

$$\varphi(\alpha)=\iint_D F(x,y,z+\alpha\cdot\delta z,p+\alpha\cdot\delta p,q+\alpha\cdot\delta q)dxdy$$

$$\therefore\ \varphi'(0)=\iint_D(F_z\delta z+F_p\delta p+F_q\delta q)dxdy \qquad (15)$$

和本章§2第4节中所说的一样，可以证明若泛函$Q[z(x,y)]=\iint_D F(x,y,z,p,q)dxdy$的变分$\delta Q$存在，则

$$\varphi'(0)=\delta Q$$

$$\therefore\ \delta Q=\iint_D(F_z\delta z+F_p\delta p+F_q\delta q)dxdy \qquad (16)$$

这是一个很方便的公式（请读者将此式和（11）式作一比较）。由$\varphi'(0)=0$，得

$$\delta Q=\iint_D(F_z\delta z+F_p\delta p+F_q\delta q)dxdy=0 \qquad (17)$$

但是

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_p\cdot\delta z\right)=\delta z\frac{\partial}{\partial x}(F_p)+F_p\frac{\partial}{\partial x}(\partial z)$$

$$=\delta z\frac{\partial}{\partial x}(F_p)+F_p\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$=\delta z\frac{\partial F_p}{\partial x}+F_p\cdot\delta p$$

（符号δ与$\frac{d}{dx}$可交换）

$$\therefore F_p\delta p=\frac{\partial}{\partial x}(F_p\cdot\delta z)-\frac{\partial(F_p)}{\partial x}\cdot\delta z$$

同理 $\frac{\partial}{\partial y}(F_q\cdot\delta z)=\delta z\frac{\partial(F_q)}{\partial y}+F_q\cdot\delta q$

$$\therefore F_q\cdot\delta q=\frac{\partial}{\partial y}(F_q\cdot\delta z)-\frac{\partial(F_q)}{\partial y}\cdot\delta z$$

于是

$$\iint_D (F_p\delta p+F_q\delta q)dxdy$$

$$=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta z)+\frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta z)\right]dxdy$$

$$-\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_p)+\frac{\partial}{\partial y}(F_q)\right]\delta zdxdy$$

而

$$\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta z)\frac{\partial}{\partial y}+(F_q\delta z)\right]dxdy$$

$$=\int_{\partial D}(F_p\delta zdy-F_q\delta zdx)$$ ①

$$=\int_{\partial D}(F_pdy-F_qdx)\delta z=0$$

$$\therefore\iint_D(F_p\delta p+F_q\delta q)dxdy$$

$$=-\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_p)+\frac{\partial}{\partial y}(F_q)\right]\cdot\delta zdxdy$$

$$\therefore\iint_D\left(F_z-\frac{\partial}{\partial x}F_p-\frac{\partial}{\partial y}F_q\right)\delta zdxdy=0$$

因为$F_z-\frac{\partial}{\partial x}F_p-\frac{\partial}{\partial y}F_p$连续，且$\delta z$可在相当广泛的函数类中任取，所以

---

① 在这里用了格林公式$\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\partial D}(udy-vdx)$

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q = 0 \text{①} \tag{18}$$

这就是泛函$Q=\iint\limits_D F(x,y,z,p,q)dxdy$的尤拉方程。一般说来，这是偏微分方程。此方程的解，也称为“极带”。如果泛函$Q=\iint\limits_D F(x,y,z,p,q)dxdy$在$z(x,y)$上取极值（指弱极值），则$z(x,y)$应当满足方程（18）。

例 考虑泛函

$$Q[z(x,y)]=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$=\iint\limits_D(p^2+q^2)dxdy$$

$$z(x,y)|_{\partial D}=\varphi(x,y)$$

$\varphi(x,y)$是给定在边界上的连续函数。如果此泛函Q在函数$z(x,y)$上取极值，那么$z(x,y)$应当满足什么形式的方程式呢？

因为$F(x,y,z,p,q)=p^2+q^2$

$\therefore F_p=2p,\quad F_q=2q$

代入尤拉方程（18），得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 & \text{（在}D\text{内处处成立）}\\ z(x,y)|_{\partial D}=\varphi(x,y)\end{cases} \tag{19}$$

方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$是著名的拉卜拉斯方程。

---

① 对于泛函$Q[u(x_1,\cdots,x_n)]=\int\limits_D\cdots\int F\left(x_1,\cdots x_n,u(x_1,\cdots,x_n),\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)dx_1\cdots dx_n$（$D$是$n$维空间中的闭区域，$F$充分光滑。）可证明，若$Q$在满足一定条件的函数类中的某函数$u(x_1,\cdots x_n)$上取极值。则$u$满足尤拉方程$F_u-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F_{u_{x_i}}=0$ (18′)

求函数$z(x,y)$，使它在闭区域$\overline{D}(\overline{D}=D\cup\partial D)$上连续，在开区域$D$内满足拉卜拉斯方程，在边界$\partial D$上取给定的函数值，这种问题称为“拉卜拉斯方程的第一边值问题。此例说明，求泛函$Q=\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$极值的问题可转化为解拉卜拉斯方程的第一边值问题。反过来，在一定条件下，解拉卜拉斯方程的第一边值问题也可转化为解上述泛函Q的极值问题。十九世纪的大数学家黎曼（Riemann）曾利用这种观点来证明拉卜拉斯方程的第一边值问题的解存在。他的方法很有启发性，可是在他当年的论证中有一个漏洞①。后来，另一位数学家外尔斯特拉斯（Weierstras，此人可说是十九世纪中最严格的数学家）指出了这个毛病。

再举一例。对于泛函$Q[z(x,y)]=\iint\limits_{D}z^2(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}z^2(x,y)dxdy$　又$z(x,y)\Big|_{\partial D}=\varphi(x,y)\equiv 3$　问此泛函在什么函数$z(x,y)$上取极值（在连续函数类$C(D)$中考虑）？

显然$Q[z(x,y)]\geqslant 0$，且当$z(x)\equiv 0$（在Ω内）$Q[z(x,y)]$取最小值0。

但在$\overline{D}=D\cup\partial D$上连续且在$D$内为零的函数，是不会在边界$\partial D$上取非零值的。所以$z|_{\partial D}=3$是不能成立的。这就是说，此泛函在$C(D)$集合上不能达到极值。②

---

① 德国数学家黎曼1851年在他的博士论文中论证了关于共形映射的基本定理。在这篇论文中，他不加证明的认为有函数$u(x,y)$使泛函$Q[u]=\iint\limits_{D}(u_x^2+u_y^2)dxdy$取极值。

② 显然泛函$\iint\limits_{D}z^2(x,y)dxdy$可以无限地接近零（当$z(x,y)$在集合$C(D)$中变动），但不会达到零。用分析的语言来说，当$z(x,y)\in C(D)$，$Q[z(x,y)]$有下确界零，但在$C(D)$上，Q不能达到下确界值。

§7 本 章 提 要

一、基本定义

1. 泛函　把具备某种性质的函数的集合记作D，若对于任何$f\in D$，变量Q都有唯一确定的值和它对应，则称变量Q为依赖于函数f的泛函，记为$Q=Q[f]$或$Q=Q[f(x)]$。一元函数$f(x)$也可换成多元函数，如$Q=Q[z(x,y)]$

2. 变分

（1）函数的变分

对于一元函数$y(x)$，规定它的变分为

$$\delta y=\overline{y}(x)-y(x)$$

在计算时，符号d与δ可互换，即

$$d(\delta y)=\delta(dy)$$

对于多元函数$z(x,y)$，规定它的变分为

$$\delta z=\overline{z}(x,y)-z(x,y)$$

令　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=p$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=q$。在计算时有

$$\frac{\partial}{\partial x}(\delta z)=\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\delta p$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\delta z)=\delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\delta q$$

（2）泛函的变分

a）泛函$Q[y(x)]$（或$Q[z(x,y)]$的增量的线性主要部分叫变分，记作δQ。

b）若泛函$Q[y(x)]=\int_a^b F[x,y(x),y'(x)]dx$的变分存在（设$F$充分光滑），则

$$\delta Q=\varphi'(0)=\int_a^b(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')dx$$

（在此，$\varphi(\alpha)=Q[y(x)+\alpha\delta y]$，$y(x)$及$\delta y$给定）

c）若泛函$Q\left[z(x,y)\right]=\iint\limits_D F\left[x,y,z(x,y),\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]dxdy$的变分存在（设$F$充分光滑，并记$\dfrac{\partial z}{\partial x}=p$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=q$），则

$$\delta Q=\iint\limits_D (F_z\delta_z+F_p\delta p+F_q\delta q)dxdy$$

3．尤拉方程

（1）对于泛函$Q[y(x)]=\int_a^b F[x,y(x),y'(x)]dx$，其尤拉方程为

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

（2）对于泛函$Q[y(x)]=\int_a^b F[x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x)]dx$，其尤拉方程为

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0$$

（3）对于泛函数$Q[y_1(x),\cdots,y_n(x)]=\int_a^b F[x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n']dx$，其尤拉方程为

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

（4）对于泛函 $Q[z(x,y)]=\iint\limits_D F\left[x,y,z(x,y),\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]dxdy$，其尤拉方程为

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}F_p-\frac{\partial}{\partial y}F_q=0 \qquad \left(p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

（5）对于泛函$Q[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$

$$=\int\cdots\int_D F\left[x_1,\cdots,x_n,u(x_1,\cdots,x_n),\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \cdots\ \frac{\partial u}{\partial x_n}\right]dx_1\cdots dx_n,$$

其尤拉方程为

$$F_u-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F_{u_{x_i}}=0$$

参 考 文 献

〔1〕M·A·拉甫伦捷夫，A·A.留斯捷尔涅克,《变分学教程》，高等教育出版社，1955。

〔2〕И·М·Гельфанд,С·В·Фомин, Варианионное Исчисление,Москва,1961。

〔3〕Л·Э·艾利斯哥尔兹，《变分法》商务印书馆，1956。

〔4〕R.Courant and D. Hilbert,Methods of Mathemetical Physis,Interscience Publishers,Inc.,New York 1953。

〔5〕斯米尔诺夫，《高等数学教程》，第四卷一分册,人民教育出版社。1979

〔6〕R·A·ADAMS，《索波列夫空间》，第二章，人民教育出版社，1981。

第三章 变分法在力学中的一些应用

在第二章中叙述了泛函Q取极值的必要条件，概括起来就是：若泛函Q在某函数上取极值（此函数满足事先给定的边值条件），则该函数满足尤拉方程。很明显，我们还要解决另一个问题，变分理论才会完整。这问题就是：如果某函数满足尤拉方程和边值条件，它是不是能使泛函Q取极值？此外，还应当说明一个问题：如果Q在某函数上取极值，那么Q究竟取极大值还是极小值？从逻辑学的角度来观察，应当先搞清楚了这些问题，再来谈变分法的应用。但是，对初学者来说，作者认为在学了尤拉方程之后，还是先接触应用问题为好。理由是：

1. 广大的工程技术人员关心的是用变分法解决实际问题。对这些同志来说，只要掌握了本书第一、二章的内容，就可以用于实际了。

2. 从变分学的发展史来看也是这样。尤拉和拉格兰日的工作只提出了泛函取极值的必要条件（即本书第二章的内容）。尤拉是在1736年发表他的成果的，其中有后来命名为尤拉方程的著名方程式。在此后七十余年间，数学家们长期探索泛函Q取极值的充分条件，没有取得多少成绩。1807年雅可必（Jacobi）在这方面稍有进展，但他对问题的叙述是不准确的。直到1879年，外尔斯特拉斯才正确提出并严格论证了泛函取极值的充分条件。这已经是尤拉方程出现后的第一百四十三个年头了！尽管充分条件的建立是这样晚，但是并没有妨碍变分法在这一个半世纪中广泛应用于实际。

3. 泛函极值存在的充分条件的论证是相当困难的（本书限于篇幅，不谈这个充分条件了）。

本章主要是介绍变分法在力学中的应用，其他方面略有涉

及。读者理解指导思想之后，自然可应用到更广泛的领域中去。

§1 哈密尔顿原理和拉格兰日方程

1. 哈密尔顿原理

当牛顿建立了以三大定律及万有引力定律为基础的力学理论以后，无数的自然现象都得到了定量的说明，事情似乎已经很完善了。但科学家是永不满足于已有成就的人，他们仍然继续探索宇宙的奥秘。后来，拉格兰日在十八世纪提出一个变分原理，从这个原理出发，运用变分法，能够十分方便地解决力学问题，并且还可以推导出力学中的主要定律。在他著的《分析力学》中叙述了这些成果。据说他讲过这么一句话："在我的《分析力学》中没有一张图"。他还创立了"拉格兰日运动方程"，它比牛顿的运动方程适应的范围更广，用起来也往往更方便。以后，哈密尔顿（Hamilton）又发展了拉格兰日的理论，他在1834年提出了一个著名的原理（现在称为哈密尔顿原理），大意是：

在质点（甚至是质点系或物体）的一切可能的运动中，真实的运动应使积分

$$S=\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt$$

取极值。在此，T和U分别是动能和位能，t_1和t_2是两个任取的时刻。

这个原理竟成了力学中的基本原理。以它为基础，可导出牛顿三大定律和能量、动量和动量矩守恒定律。读者若对此有兴趣，请阅朗道所著《力学》一书（学了变分法以后，看此书是不会感到困难的）。现在我们来把此原理说得更清楚一些。

哈密尔顿原理的精确表述是：假定在$t=t_1$及$t=t_2$时刻质点的位置已分别确定在A点及B点，那么质点运动的真实轨道及速度，使积分

$$S=\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt \qquad (S\text{又称“作用量”})$$

取极值。在此T及U各为质点的动能和位能。所谓真实轨道请看图4，图中的$x=(x_1,x_2,x_3)$是三维空间坐标，t是时间坐标，带箭头的曲线表示真实轨道。这是示意图。

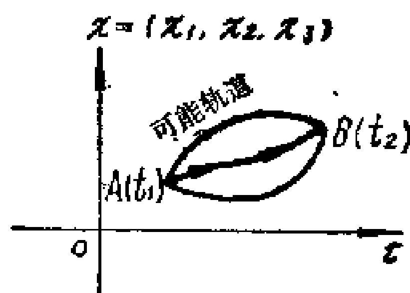


图 4

例 试由哈密尔顿原理导出牛顿第一定律

对于自由质点，动能

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)^{①}$$

位能U恒为零。于是作用量

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)dt$$

当$t=t_1$，质点位于$A(a_1,b_1,c_1)$点，

当$t=t_2$，质点位于$B(a_2,b_2,c_2)$点。即

$$x(t_1)=a_1 \qquad x(t_2)=a_2$$
$$y(t_1)=b_1 \qquad y(t_2)=b_2$$
$$z(t_1)=c_1 \qquad z(t_2)=c_2$$

显然，此$S=\int_{t_1}^{t_2}\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)dt=S[x(t),y(t),z(t)]$

是轨道

$$\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$$

的泛函。这是第二章§5中所说的$\int_a^b F[x,y_1(x),\cdots,y_n(x),y_1'(x),\cdots,y_n'(x)]dx$型泛函。由§5可知，若泛函$S$在轨

---

① $x(t),y(t),z(t)$表示出质点坐标(x,y,z)与时间t的关系。$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$分别是$\frac{dx}{dt}$，$\frac{dy}{dt}$，$\frac{dz}{dt}$，这是牛顿引入的导数（他称之为“流数”）记号。

道 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 上取极值，则$x(t)$，$y(t)$和$z(t)$满足尤拉方程

$$\begin{cases} F_x - \dfrac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 0 \\ F_y - \dfrac{d}{dt}F_{\dot{y}} = 0 \\ F_z - \dfrac{d}{dt}F_{\dot{z}} = 0 \end{cases}$$

但是$F = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$$\therefore F_x = 0 \qquad F_{\dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = m\ddot{x} = 0$$

$\therefore \ddot{x} = 0$　同理得 $\ddot{y} = 0$，$\ddot{z} = 0$

可见自由质点的加速度为零，所以其速度为常量（说得更清楚一些，速度是常矢量）。也就是说，当质点不受外力作用时，它或静止，或作匀速直线运动。我们由哈密尔顿原理导出了牛顿第一定律。

例　试由哈密尔顿原理导出质点在重力场① 中的运动方程。

在地球表面附近，可认为重力加速度 g 的值不变。将坐标系原点O放在地平面上，取z轴竖直向上。质点的动能$T = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$，位能$U = mgz$，于是泛函（即"作用量"）

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz\right] dt$$

$$F = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - mgz)$$

$$\therefore \qquad F_x = 0 = F_y \qquad F_z = -mg$$

$$F_{\dot{x}} = m\dot{x}, \quad F_{\dot{y}} = m\dot{y}, \quad F_{\dot{z}} = m\dot{z}$$

---

① 指地球表面附近的均匀重力场。

由 $F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}=0$ 得$\ddot{x}=0$

由 $F_y-\frac{d}{dt}F_{\dot{y}}=0$ 得$\ddot{y}=0$

由 $F_z-\frac{d}{dt}F_{\dot{z}}=0$ 得$-mg-m\ddot{z}=0$ $\therefore \ddot{z}=-g$

于是得质点在重力场中的运动方程

$$\begin{cases}\ddot{x}=0\\ \ddot{y}=0\\ \ddot{z}=-g\end{cases}$$

例 由哈密尔顿原理导出质点在地球引力场中的运动方程。

将坐标原点置于地球中心①，质点及地球的质量分别记为m和M，质点的坐标为（$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$），于是动能及位能分别是

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

$$U=-GM\frac{m}{r}=-K\frac{m}{r} \qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

作用量为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+K\frac{m}{r}\right]dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}F[t,x(t),y(t),z(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)]dt$$

$$F=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+K\frac{m}{r}$$

$$F_x=\frac{\partial}{\partial x}\frac{mK}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{mK}{r^3}x \qquad F_{\dot{x}}=m\dot{x}$$

$$F_y=-\frac{mK}{r^3}y \qquad F_{\dot{y}}=m\dot{y}$$

① 严格地说，此坐标系的三条轴线还不能和地球牢固地连接在一起，关于这一点请参阅爱因斯坦所著《狭义与广义相对论浅说》中译本第10页“伽利略坐标系”一节。我们不妨规定坐标系的x，y，z三轴正向均指向三个充分遥远的天体。

$$F_z = -\frac{mK}{r^3} z \qquad\qquad F_z^{\prime} = m\ddot{z}$$

尤拉方程（14）化为质点在地球引力场中的运动方程。

$$\begin{cases} \ddot{x} = -K\dfrac{x}{r^3} \\ \ddot{y} = -K\dfrac{y}{r^3} \\ \ddot{z} = -K\dfrac{z}{r^3} \end{cases}$$

2． 质点系的广义坐标和广义速度

确定质点在平面上的位置，需要两个坐标，这是常识。但是请注意，这两个坐标不一定是直角坐标。例如，在平面上取极坐标系，则质点位置由坐标 r（向径）和φ（角度）所确定。由

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

我们把 r、φ称为质点的广义坐标。

一般说来，若有两个独立参数q_1，q_2，且

$x = x(q_1,\ q_2)$

$y = y(q_1,\ q_2)$ （即由$(q_1,\ q_2)$可唯一确定$(x,\ y)$）

则称q_1，q_2是平面上点的广义坐标。

对于空间中的质点，它的直角坐标是(x,y,z)，若有独立参数q_1，q_2，q_3，且

$$\begin{cases} x = x(q_1,\ q_2,\ q_3) \\ y = y(q_1,\ q_2,\ q_3) \\ z = z(q_1,\ q_2,\ q_3) \end{cases}$$

（即由$(q_1,\ q_2,\ q_3)$可唯一确定(x,y,z)）则称q_1，q_2，q_3是空间中质点的广义坐标。

决定空间中一个质点的位置要三个广义坐标。要确定N个质点的位置常需要$3N$个广义坐标。一般说来，能够确定体系（质

点系或刚体）位置的K个独立参数q_1，q_2，…q_K称为此体系的"广义坐标"，而它们对时间的导数$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…$\dot{q}_K$称为广义速度。数K称为体系的自由度。

3． 拉格兰日方程

现在，我们来导出描写质点运动的拉格兰日方程。先设质点只有一个广义坐标q（这时质点的自由度为1）。因为质点位置由广义坐标$q(t)$决定，所以动能T和位能U是q及$\dot{q}$的函数。把$T-U$叫做拉格兰日函数，记为

$$T-U=L=L(t,\ q,\ \dot{q})$$

于是，质点的作用量为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(t,\ q,\ \dot{q})dt$$

因为S取极值①，所以真实轨道$q(t)$满足

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0 \tag{20}$$

这就是力学中著名的拉格兰日方程。同样，若质点系（在此处，质点系包括刚体）的位置由广义坐标q_1，q_2，…，q_K决定（这时称质点系有K个自由度）且$q_i(t_1)$及$q_i(t_2)$（$i=1,\cdots,K$）均已给定（即在$t=t_1$及$t=t_2$两时刻，体系的位置已给定），当质点系由t_1时刻的位置变到t_2时刻的位置时，作用量

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(t,q_1,\cdots,q_K,\dot{q}_1\cdots\dot{q}_K)dt$$

取极值。S是第二章§5中所说的$\int_a^b F[x,\ y_1(x),\ \cdots,\ y_n(x),\ \dot{y}_1(x),\ \cdots\dot{y}_n(x)]dx$型泛函。由此可知真实轨道$q_i(t)$（$i=1,\ \cdots,\ k$）满足

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0\ \ (i=1,\cdots,\ K) \tag{21}$$

这就是质点系的拉格兰日方程组。它是在广义坐标系中质点

---

① 指当$q(t_1)=q_1$，$q(t_2)=q_2$给定时，质点的真实轨道$q_1(t)$及$q_2(t)$（这是满足$q(t_1)=q_1$，$q(t_2)=q_2$的一切可能轨道中的一个）使S取极值。

系的运动方程，表达了质点系运动的一般规律。

读者也许会问：拉格兰日方程究竟有些什么优点呢？我们还是举例来说明问题吧！

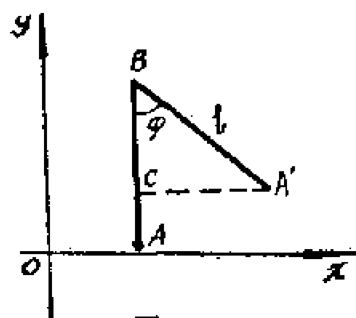


图 5

例 在长为l的细丝（其质量略去不计）末端悬一质点，其质量为m，细丝另一端固定，置重力场中。写出质点的运动方程。

取坐标系如图 5 所示。此质点的位置显然由一个广义坐标 φ 确定。动能$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2$，当$\varphi=0$时，取质点的位能为零，则在$\varphi$处质点的位能为

$$U=mg\cdot\overline{AC}=mgl(1-\cos\varphi)$$

于是拉格兰日函数为

$$L=T-U=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2-mgl(1-\cos\varphi)$$

质点的拉格兰日方程（20）即

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}$$

由

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=-lmg\sin\varphi \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)=\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi})=ml^2\ddot{\varphi}$$

可得

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0 \tag{22}$$

这就是单摆的运动方程（设摆杆的质量可略去），这是非线性二阶常微分方程。若$|\varphi|$充分小，用$\sin\varphi\approx\varphi$取

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{23}$$

代替上述方程来描述单摆运动，这是线性二阶常微分方程。它的通解为

$$\varphi=c_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+c_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

若

$$\varphi(0)=0\qquad\dot{\varphi}(0)=A$$

则

$$\varphi=A\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

可见当质点作微小摆动时，其周期是$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，但当摆幅太大，其周期就不是此数了。

刚才我们对摆动作了一番分析。由此例已经能看出拉格兰日方程的巨大优越性。它适用于各种形式的坐标系。在解应用题时不必画力的分解图，只须写出动能T及位能U关于广义坐标q_i及广义速度$\dot{q}_i$（$i=1$，…，k）的表达式，然后代入拉格兰日方程即可。

在这里我们还要说明，因为本书只是简略地介绍一下变分法在力学中的应用，所以对于拉格兰日方程成立的条件（即对什么样的质点系，它的运动方程可用拉格兰日方程描写）没有作精确论述。读者欲知其详，请参阅朗道所著《力学》或国内近年来出版的有关专著。

§2　变分法在力学中的应用举例

在处理各种工程技术问题时，常常需要推导出描写某些物体运动的微分方程，然后利用微分方程的解来找出运动规律。这个办法是牛顿创立的。他找到了描写天体运动（后来看出还适用于各种物体）的微分方程，然后断定天体运动轨道是圆锥曲线。另一个著名的例子是麦克士威（Maxwell）找到了描写电磁场变化的微分方程，然后根据此方程断定电磁波存在，这是1868年的事。直到1887年（也就是在麦克士威根据微分方程作出他的科学

预言的十九年之后）赫兹（Hertz）才用实验证实了电磁波的存在。在科学史上还有大量的例子可以说明微分方程的巨大作用。在我国工程界，现在大家习惯于用达朗倍尔原理列出力平衡方程，由此得到运动方程。这种方法固然有它的优点，但是若用变分原理来导出方程，却有更大的优越性。在本节中，我们将从各方面举例来说明这种方法。



图 6

例　推导细杆的纵振动方程。

取坐标系如图 6 所示。将杆上点 x 处的位移记为 $u(x,\ t)$，由虎克定律，长 l 的杆在力 F 的作用下（力 F 与杆平行）所发生的长度改变 $\Delta l=\dfrac{Fl}{ES}$，在此 E 为杨氏模量，S 为杆的横断面面积。于是相对伸长

$$\frac{\Delta l}{l}=\varepsilon=\frac{F}{ES}\qquad\therefore\quad F=ES\varepsilon$$

现在截取杆段如图 7 所示。

则

$$\begin{aligned}\varepsilon&=\frac{x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)-x-u(x,t)}{\Delta x}\\&=\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}\\&=u_x(x+\theta\Delta x,t)\qquad(0<\theta<1)\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad F(x+\Delta x,\ t)=ESu_x(x+\theta\Delta x,\ t)$$

在此式中，令 $\Delta x\to 0$，得

$$F(x,\ t)=ESu_x(x,\ t)$$

$$\therefore\qquad F(x+\Delta x,\ t)=ESu_x(x+\Delta x,\ t)$$

现在求弹性位能 U。由弹性力学可知，弹性体在变形过程中克服内力所作的功，作为能量积蓄在体内，此能量称为弹性位能。杆段 $[x,\ x+\Delta x]$ 所受弹性力为（见图 7）

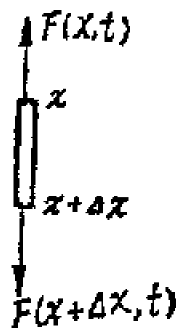


图 7

$$SEu_x(x+\Delta x,t)-SEu_x(x,t)=SEu_{xx}(x+\theta\Delta x,t)\Delta x$$
$$(0<\theta<1)$$

于是，在dt时间内，此力所作的功为

$$\underbrace{SEu_{xx}(x+\theta\Delta x,t)\Delta x}_{\text{力}}\cdot\underbrace{u_t dt}_{\text{距离}}\doteq SEu_{xx}(x,t)u_t dxdt$$

这是在杆段〔x, $x+\Delta x$〕中内力所作的功。至于弹性体克服内力所作的功，当然与此式反号。所以在〔t, $t+\Delta t$〕时间间隔中积蓄在杆段〔x, $x+\Delta x$〕中的位能微元是

$$dU=-SEu_{xx}(x,\ t)u_t dxdt$$

于是，弹性位能为

$$\begin{aligned}U&=-\int_0^t\int_0^l SEu_{xx}(x,\ t)u_t dxdt\\&=-SE\int_0^t dt\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial x}(u_x u_t)-u_x u_{xt}\right]dx\\&=-SE\int_0^t\left[u_x u_t\Big|_0^l-\int_0^l u_x u_{xt}dx\right]dt\\&=SE\int_0^t\int_0^l u_x u_{xt}dxdt\\&=SE\int_0^l dx\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u_x^2\right)dt\\&=SE\int_0^l\frac{1}{2}u_x^2 dx\text{①}\end{aligned}\tag{24}$$

再求动能。在杆段〔x, $x+\Delta x$〕中，动能微元是

$$dT=\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2(x,\ t)Sdx\qquad(\rho(x)\text{是质量密度})$$

所以动能是

$$T=\int_0^l\frac{1}{2}\rho(x)Su_t^2(x,\ t)dx\tag{25}$$

拉格兰日函数为

$$L=T-U=\int_0^l\left(\frac{1}{2}\rho(x)Su_t^2-\frac{1}{2}SEu_x^2\right)dx$$

---

① 在推导过程中，用到了$u_t(0,\ t)=0$，$u_x(l,\ t)=0$及$u_x(x,\ 0)=0$

作用量为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l\left[\frac{1}{2}\rho(x)Su_t^2-\frac{1}{2}SEu_x^2\right]dxdt$$

在此，S是$u(x,\ t)$的泛函，即

$$S[u(x,\ t)]=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l F[x,t,u(x,t),u_t(x,t),$$
$$u_x(x,t)]dxdt$$

这是在第二章§6中讨论过的多元函数的泛函，它的尤拉方程（参看(18)式）是

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_p-\frac{\partial}{\partial t}F_q=0 \qquad (u_x=p,\ u_t=q)$$

$$\because \quad F=\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2S-\frac{1}{2}SEu_x^2=\frac{1}{2}\rho(x)Sq^2-\frac{1}{2}SEp^2$$

$$\therefore \quad F_u=0 \qquad F_p=-SEp=-SEu_x$$
$$F_q=\rho(x)Sq=\rho(x)Su_t$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial x}(SEu_x)-\frac{\partial}{\partial t}(\rho(x)Su_t)=0$$

$$\therefore \quad u_{tt}=\frac{E}{\rho(x)}u_{xx} \qquad \text{（注意横截面面积}S\text{是常数）} \tag{26}$$

当$\rho(x)\equiv\rho$（常数时，取$\dfrac{E}{\rho}=a^2$），得

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \tag{27}$$

这是偏微分方程中熟知的弦振动方程。

例 推导弦的自由横振动方程（设弦两端点固定）

取坐标系如图8。用函数$u(x,\ t)$表示在时刻t点x的横向位移。

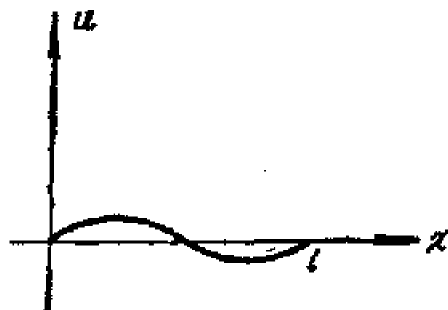


图 8

取弦段$[x,\ x+\Delta x]$，此段经过变形后的长度是

$dl=\sqrt{1+u_x^2}\,dx$，所以此段的伸长量是

$$\sqrt{1+u_x^2}\,dx-dx=(\sqrt{1+u_x^2}-1)dx$$

$$\approx\left(1+\frac{1}{2}u_x^2-1\right)dx=\frac{1}{2}u_x^2dx$$

（当$u_x^2\ll 1$、即u_x^2比 1 小得多）

在此段中，弹性位能与伸长量成正比，即

$$dU=\frac{K}{2}u_x^2dx \tag{28}$$

于是位能

$$U=\int_0^l\frac{K}{2}u_x^2dx \tag{29}$$

又动能为

$$T=\int_0^l\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2dx \qquad (\rho(x)\text{是弦的质量线密度}) \tag{30}$$

作用量为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l\left[\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2(x,\ t)-\frac{1}{2}Ku_x^2(x,\ t)\right]dxdt$$

这是多元函数$u(x,\ t)$的泛函，它的尤拉方程（即方程(18)）是

$$\frac{\partial}{\partial x}[Ku_x^2(x,\ t)]-\frac{\partial}{\partial t}[\rho(x)u_t^2(x,t)]=0$$

$$\therefore \qquad u_{tt}=\frac{K}{\rho(x)}u_{xx}$$

这就是方程（26），当$\rho(x)\equiv\rho$(常数)，取$\frac{K}{\rho}=a^2$，我们又得到方程（27）。可见方程（26）和(27)既可以描写细杆的纵振动，又可描写弦的横振动。

例　推导弦的受迫横振动方程。

问题的条件与前例基本相同。唯一区别是设弦上各点均有外力作用，此力与弦的平衡位置（即x轴）垂直，外力的线密度为$\psi(x,t)$①，于是作用在弦段$[x,x+\Delta x]$上的总外力是$\psi(x,t)dx$。在时刻t，弦上的x点位移到$u(x,\ t)$，于是在此弦段上，外力作的功可近似地表为

$$-\psi(x,t)u(x,t)dx$$

① 设外力向下时ψ为正，反之则ψ为负，

所以，在 t 时刻，外力位能为

$$-\int_0^l \psi(x,\ t)u(x,\ t)dx$$

这份能量也积蓄在弹性体中。可见弦的总位能应当是弹性位能与外力位能之和。于是

$$U=\int_0^l\left[\frac{1}{2}Ku_x^2(x,t)-\psi(x,t)u(x,\ t)\right]dx$$

$$T=\int_0^l\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2(x,t)dt$$

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l\left[\frac{1}{2}\rho u_t^2-\frac{1}{2}Ku_x^2+\psi u\right]dxdt$$

$$F=\frac{1}{2}\rho u_t^2-\frac{1}{2}Ku_x^2+\psi u=\frac{1}{2}\rho(x)q^2-\frac{1}{2}Kp^2+\psi u$$

由 $F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_p-\frac{\partial}{\partial t}F_q=0$ 得

$$\psi(x,t)-\rho(x)u_{tt}+Ku_{xx}=0$$

$$\therefore\qquad u_{tt}=\frac{K}{\rho(x)}u_{xx}+\frac{\psi(x,t)}{\rho(x)}\tag{31}$$

当 $\rho\equiv\rho(x)\equiv\rho$（常数）时，令 $\frac{K}{\rho}=a^2$，$\frac{\psi(x,t)}{\rho(x)}=\varphi(x,\ t)$

（因 $\psi(x,t)$ 及 $\rho(x)$ 均为已知函数，故 $\varphi(x,t)$ 为已知函数）

$$\therefore\qquad u_{tt}=a^2u_{xx}+\varphi(x,t)\tag{32}$$

方程（31）及（32）均为弦的受迫振动方程。

例 推导膜的自由振动方程

取坐标系如图 9。$u(x,y,t)$ 表示在 t 时刻膜上点 (x,y) 的位移。在膜上任取一小块，其面积改变量为

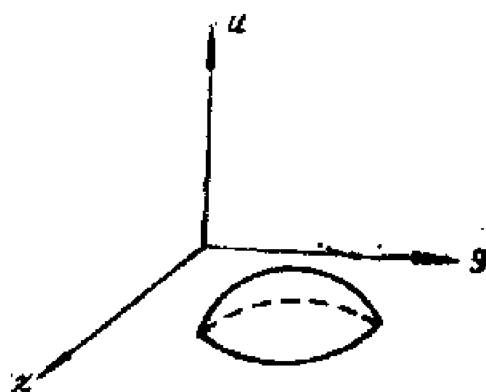


图 9

$$\Delta S=\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}-1\,dxdy$$

$$\approx\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)dxdy$$

（设 u_x^2 及 u_y^2 比 1 小得多）

于是，在此小块上弹性位能是

$$dU=\frac{K}{2}(u_x^2+u_y^2)dxdy \qquad (K\text{是常数})$$

$$\therefore \qquad U=\iint_{\Omega}\frac{K}{2}(u_x^2+u_y^2)dxdy$$

又 $T=\iint_{\Omega}\frac{1}{2}\rho(x,y)u_t^2dxdy$ （$\rho(x,y)$是膜的质量面密度）

∴ 作用量为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}dt\iint_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\rho u_t^2-\frac{K}{2}(u_x^2+u_y^2)\right]dxdy$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\iint_{\Omega}F[x,y,t,u(x,y,t),u_x(x,y,t),$$

$$u_y(x,y,t)]dxdydt$$

这是多元函数$u(x,y,t)$的泛函，x,y,t是自变量。它的尤拉方程（见方程(18′)）是

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}-\frac{\partial}{\partial t}F_{u_t}=0$$

$$\because \qquad F=\frac{1}{2}\rho(x,\ y)u_t^2-\frac{K}{2}(u_x^2+u_y^2)$$

$$\therefore \quad F_u=0,\quad F_{u_x}=-Ku_x,\quad F_{u_y}=-Ku_y,\quad F_{u_t}=\rho u_t$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial x}(Ku_x)+\frac{\partial}{\partial y}(Ku_y)-\frac{\partial}{\partial t}(\rho(x,y)u_t)=0$$

$$\therefore \qquad u_{tt}=\frac{K}{\rho(x,y)}(u_{xx}+u_{yy}) \qquad (33)$$

当$\rho(x,\ y)\equiv\rho$（常数），令$\frac{K}{\rho}=a^2$，于是

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}) \qquad (34)$$

这就是膜振动方程

例 导出梁的微振动方程

取坐标系如图10。仍以$u(x,t)$表示t时刻梁上的点x处的位移。由弹

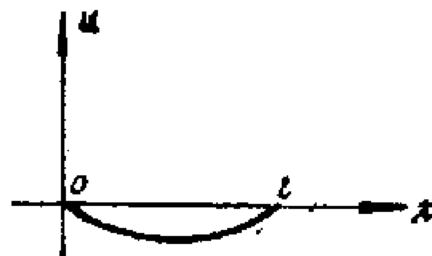


图 10

性力学可知其位能与曲率的平方成正比。于是，在梁段〔x, $x+\Delta x$〕上，位能为

$$dU=K\left[\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}}\right]^2dx\approx Ku_{xx}^2dx ①$$

$$\therefore \qquad U=\int_0^l Ku_{xx}^2(x,t)dx$$

又 $T=\frac{1}{2}\int_0^l\rho(x)u_t^2(x,t)dx$ （$\rho(x)$是质量线密度）

∴ 作用量为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l\left[\frac{1}{2}\rho u_t^2-Ku_{xx}^2\right]dxdt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx})dxdt$$

$$F=\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2(x,t)-Ku_{xx}^2(x,t)$$

对于泛函S，它的尤拉方程是

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial t}F_{u_t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}}=0 \qquad (35)$$

在第二章中，没有讨论过这种泛函的尤拉方程。现在对方程（35）作一简略的论证。

把问题提得更普遍一点。考虑泛函

$$S=\iint_D F[x,y,u(x,y),u_x,u_y,u_{xx},u_{yy}]dxdy$$

在此，区域D的边界∂D及函数F均充分光滑。由$\delta S=0$，可得泛函S的尤拉方程①。推导过程大致如下：

$$\delta S=\iint_D\left\{\frac{\partial F}{\partial u}\delta u+\frac{\partial F}{\partial p}\delta p+\frac{\partial F}{\partial q}\delta q+\frac{\partial F}{\partial r}\delta r\right.$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial s}\delta s\right\}dxdy$$

① 由弹性力学可知，常数$K=\frac{1}{2}EJ$，E是杨氏模量，J是梁的横断面的转动惯量。

在此，$u_x=p$，$u_y=q$，$u_{xx}=r$，$u_{yy}=s$

在第二章§6中曾指出

$$\iint_D (F_p\delta p+F_q\delta q)dxdy$$
$$=-\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}F_p+\frac{\partial}{\partial y}F_q\right)\delta u dxdy$$

又

$$\iint_D\left[\frac{\partial F}{\partial r}\delta r+\frac{\partial F}{\partial s}\delta s\right]dxdy$$
$$=\iint_D\left[\frac{\partial F}{\partial r}\delta(u_{xx})+\frac{\partial F}{\partial s}\delta(u_{yy})\right]dxdy$$
$$=\iint_D\left[\frac{\partial F}{\partial r}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\delta u_x)+\frac{\partial F}{\partial s}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\delta u_y)\right]dxdy$$
$$=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\delta u_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\delta u_y\right)\right]dxdy$$
$$-\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)\cdot\delta u_x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)\cdot\delta u_y\right]dxdy$$

用格林公式得到

$$\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\delta u_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\delta u_y\right)\right]dxdy$$
$$=\int_{\partial D}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial r}\delta u_x\right)dy-\left(\frac{\partial F}{\partial s}\delta u_y\right)dx\right]=0$$

（∵u_x及u_y在边界上给定，∴$\delta u_x|_{\partial D}=0=\delta u_y|_{\partial D}$）

又 $$-\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)\cdot\delta u_x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)\cdot\delta u_y\right]dxdy$$

---

① 给定边值条件$u|_{\partial D}=\varphi$，$u_x|_{\partial D}=\psi$，$u_y|_{\partial D}=\omega$。在满足这种边值条件且充分光滑的函数类中研究泛函 S 的极值。设 S在 $u(x, y)$上取极值，找出 $u(x, y)$应当满足的尤拉方程。

$$=-\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)\cdot\frac{\partial(\delta u)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)\cdot\frac{\partial(\delta u)}{\partial y}\right]dxdy$$

$$=-\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial r}\cdot\delta u\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial s}\cdot\delta u\right)\right]dxdy$$

$$+\iint\limits_D\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)\right]\delta u dxdy$$

但

$$\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial r}\delta u\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial s}\delta u\right)\right]dxdy$$

$$=\int\limits_{\partial D}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial r}\delta u\right)dy-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial s}\delta u\right)dx\right]=0$$

综合以上各式，得

$$\iint\limits_D\left[\frac{\partial F}{\partial r}\delta r+\frac{\partial F}{\partial s}\delta s\right]dxdy$$

$$=\iint\limits_D\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)\right]\delta u dxdy$$

$$\therefore\qquad \delta s=\iint\limits_D\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial s}\right]\delta u dxdy=0$$

因为此式对满足一定条件的函数类中的任何δu都成立，所以

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial s}=0 \tag{36}$$

这就是泛函$S=\iint\limits_D F(x,y,u(x,y),u_x,u_y,u_{xx},u_{yy})dxdy$的尤拉方程（此方程用得不多，在第二章中未提到）。

由此可见，对于泛函

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l F(x,t;u(x,t),u_x,u_t,u_{xx})dxdt$$

它的尤拉方程是(35)式。对$F=\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2(x,t)-Ku_{xx}^2(x,t)$

求出F_u，$\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}$，$\frac{\partial}{\partial t}F_{u_t}$及$\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}}$，代入（35）式，得

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2K\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \qquad (37)$$

这就是梁的自由（横）振动方程。

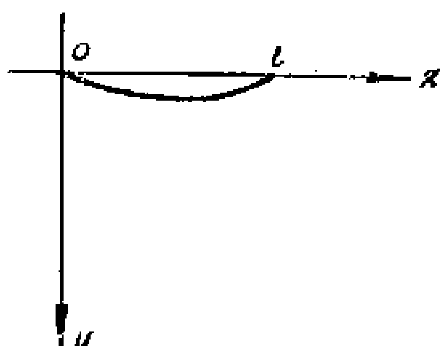


图 11

例 求在重力场中定梁的轴线的形状（设梁的两端固定且轴线的弯曲程度很小）。注意现在梁受重力作用，所以不能用梁的自由振动方程。又定梁处于平衡状态，这时动能为零。取坐标系如图11。以$u(x)$表示梁轴线上x点处的位移（现在u与时间无关）。在$[x,x+\Delta x]$段的重力位能$\approx -g\rho(x)u(x)dx$。此段的弹性位能$\approx\frac{1}{2}EJu_{xx}^2dx$。又总位能是二者之和，所以

$$U=\int_0^l\left[\frac{1}{2}EJu_{xx}^2-g\rho(x)u(x)\right]dx$$

作用量泛函为

$$S=-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l\left[\frac{1}{2}EJu_{xx}^2-g\rho(x)u(x)\right]dxdt$$

$$F=\frac{1}{2}EJu_{xx}^2(x)+g\rho(x)u(x)$$

尤拉方程是

$$F_u-\frac{d}{dx}F_{u_x}+\frac{d^2}{dx^2}F_{u_{xx}}=0$$

$$\therefore \qquad g\rho(x) - EJu^{(4)}(x) = 0$$

$$u^{(4)}(x) = \frac{g\rho(x)}{EJ} \tag{38}$$

这是4阶常微分方程，它的积分曲线有4个任意常数，它们可由边界条件定出。由此可得梁的轴线方程。

这个例子也可用如下方法求解。当梁处在平衡态（稳定平衡）时，动能为零，位能最小，所以

$$U = \int_0^l \left[\frac{1}{2}EJu_{xx}^2 - g\rho(x)u(x)\right]dx$$

$$= \int_0^l F[x, u(x), u''(x)]dx$$

取极小值。

这时$U[u(x)]$是一元函数$u(x)$的泛函。若U在$u(x)$上取极值，则$u(x)$满足尤拉方程（12），写出的方程仍然和刚才的相同。

例 设梁的两端固定，在梁上某点有一集中荷载。试用广义坐标求梁的挠度。

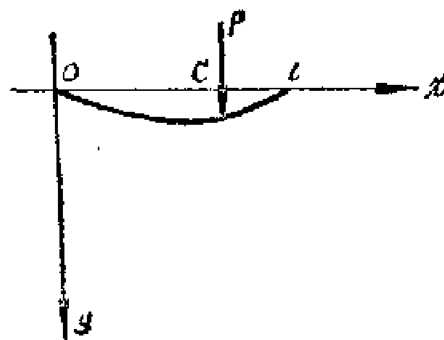


图 12

取坐标系如图12所示。设梁上坐标为C处有一集中力P作用。这时梁轴线可表为富里哀（Fourier）级数

$$y = a_1\sin\frac{\pi x}{l} + a_2\sin\frac{2\pi x}{l} + \cdots + a_n\sin\frac{n\pi x}{l} + \cdots$$

也就是说 $y = f(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$。

现在把（a_1，a_2，…，a_n，…）视为此质点系（即梁）的广义坐标。于是此系有无穷个广义坐标。过去我们只讨论过具有有限个广义坐标的质点系，但是现在我们不妨继续讨论下去。

C点处的位移为

$$y(c) = a_1\sin\frac{\pi c}{l} + a_2\sin\frac{2\pi c}{l} + \cdots + a_n\sin\frac{n\pi c}{l} + \cdots$$

外力P产生的位能为①

$$U_1=-Py(c)=-P\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi c}{l}$$

弹性位能是

$$U_2=\frac{1}{2}EJ\int_0^l y''^2(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}EJ\int_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{l^2}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}^2dx$$

$$=\frac{\pi^4EJ}{4l^3}\sum_{n=1}^{\infty}n^4a_n^2 \text{②}$$

于是总位能为

$$U=U_1+U_2=-P\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi c}{l}+\frac{\pi^4EJ}{4l^3}\sum_{n=1}^{\infty}n^4a_n^2$$

$$=U(a_1,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots)$$

因为梁处在稳定平衡态，所以U取极小值，于是

$$\frac{\partial U}{\partial a_n}=0\qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\qquad \frac{\pi^4EJ}{2l^3}n^4a_n-P\sin\frac{n\pi c}{l}=0$$

$$\therefore\qquad a_n=\frac{2l^3P}{\pi^4EJn^4}\sin\frac{n\pi c}{l}$$

由此得轴线方程

---

① 可参阅徐芝纶所编《弹性力学简明教程》中的§5—7

② 在这里用到 $\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=\begin{cases}0 & \text{当}m\neq n\\ \frac{l}{2} & \text{当}m=n\end{cases}$

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l^3P}{\pi^4EJn^4}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

由此方程可见，当 $c=0$，l 时，$y\equiv0$。这就是说，当集中力作用在端点，梁不发生弯曲。

参 考 文 献

〔1〕Л.Д.Ландау，Е.М.Лифшиц，《力学》，高等教育出版社，1959。

〔2〕钱伟长，《变分法及有限元法》，科学出版社，1980。

第四章　变分法的新发展——有限元法

在第三章中我们举了许多例子，对于它们我们都是写出有关泛函的尤拉方程就止步。但是在解决实际问题时，还要求把这些方程解出来。令人遗憾的是这些微分方程多数是不能积分成初等函数的。于是人们只好另想办法。所谓“解变分问题的直接法”就是适应这种需要而产生的。尤拉开始研究变分问题时，就用过“有限差分法”，这是“直接法”中的一种重要方法。所以尤拉也是变分问题中直接法的创始人。后来又出现了里兹(Ritz)法，伽辽金(Галеркин)法等重要方法。在这些方法的基础上，产生了“有限元法”。这种方法最早见于柯朗(Courant)1943年的论文。他在这篇文章中，首次用了一组“三角形元素”来解决力学中的一个扭转问题。但这种思想当时并未引起重视。在柯朗这一论文发表后大约十年，才有人做类似的工作。许多人（包括工程师和物理学家）在不同的领域中独立地发展了有限元法①。到了60年代，有限元法正式登台②。时至今日，它的应用范围越来越广泛，理论上也还在发展。对今天的工程技术人员来说。“有限元法”已成为必备的工具了。在本章中我们先扼要地谈一下里兹法（从数学角度看里兹法与有限元法的指导思想极为相似），然后介绍有限元法。

---

① 在有限元法创始人的名单中，还应当提到工程师Argyris，Turner，Martin及Topp等人，还可提到物理学家Prager，Synge及McHahon。这就像一种果实在许多果园中同时成熟一样，重要的数学思想也有它的成熟季节！

② 中国数学家冯康在1965年首次证明了“线性元”的收敛性。这是当时的世界记录！

§1 从里兹法谈起

1. 从具体问题说起

对于下述的常微分方程边值问题

$$\begin{cases} Lu=-\dfrac{d}{dx}\left(P(x)\dfrac{du}{dx}\right)+r(x)\cdot u(x)=f(x) \\ \qquad\qquad\qquad (a<x<b) \\ u(a)=0=u(b) \end{cases} \tag{39}$$

在此，设：$P(x)\in C^1[a,b]$，$r(x)\in C[a,b]$

$P(x)>0$，$r(x)\geqslant 0$ 且$r(x)$不恒为零。

我们把"求函数$u(x)\in c^2[a,b]$且满足(39)"称为解问题(39)。

取泛函

$$Q[u(x)]=\int_a^b[-(P(x)u'(x))'u(x)+r(x)u^2(x) -2f(x)u(x)]dx \tag{40}$$

当$u(x)\in c^2[a,b]$时，显然$Q[u(x)]$有意义。

现在我们来证明：若$u_0(x)$是问题(39)的解，则 $u_0(x)$ 使泛函$Q[u(x)]$取最小值$Q[u_0(x)]$。反之，若 $u_0(x)\in c_0^2[a,b]$ 使泛函$Q[u(x)]$取最小值$Q[u_0(x)]$，则$u_0(x)$是问题(39)的解。①

证：1）设$u_0(x)$是(39)的解。任取$W(x)\in C_0^2[a,b]$，显然$V=u_0+W\in C_0^2(a,b)$，且

$$Q[V(x)]=\int_a^b[-(PV')'V+rV^2-2fV]dx$$
$$=-PV'V\Big|_a^b+\int_a^b[PV'^2+rV^2-2fV]dx$$

但 $V(a)=0=V(b)$

所以

$$Q[V(x)]=\int_a^b[PV'^2+rV^2-2fV]dx \tag{41}$$

（显然当$V(x)\in C_0^2[a,b]$，(41) 式就成立）又

① 将所有在 $[a, b]$ 上有二阶连续导数且在两端点为零的函数的集合记作 $C_0^2[a, b]$，

即 $C_0^2[a, b]=\{f(x)|f(x)\in C^2[a, b],\ f(a)=0=f(b)\}$ 。

$$Q[V(x)]=Q[u_0(x)+W(x)]$$
$$=\int_a^b[P(u_0'+W')^2+r(u_0+W)^2$$
$$-2f(u_0+W)]dx$$
$$=\int_a^b[Pu_0'^2+ru_0^2-2fu_0]dx$$
$$+2\int_a^b[Pu_0'W'+ru_0W]dx$$
$$-2\int_a^b fWdx$$
$$+\int_a^b[PW'^2+rW^2]dx$$

但是

$$\int_a^b[Pu_0'W'+ru_0W]dx$$
$$=Pu_0'W\Big|_a^b+\int_a^b[-(Pu_0')'W+ru_0W]dx$$
$$=\int_a^b[-(Pu_0')'+ru_0]Wdx$$
$$=\int_a^b fWdx$$

所以

$$Q[V(x)]$$
$$=\int_a^b[Pu_0'^2+ru_0^2-2fu_0]dx+\int_a^b[PW'^2+rW^2]dx$$
$$=Q[u_0(x)]+\int_a^b[PW'^2+rW^2]dx$$

即

$$Q[u_0+W]=Q[u_0]+\int_a^b[PW'^2+rW^2]dx \tag{42}$$

显然，(42)式对任何$W(x)\in C_0^2[a,b]$成立。但是若$W(x)$不恒为零，则

$$\int_a^b [P(x)W'^2(x)+r(x)W^2(x)]dx>0$$

实际上若$\int_a^b [P(x)W'^2(x)+r(x)W^2(x)]dx=0$，则由 $P(x)W'^2(x)+r(x)W^2(x)$是$[a,b]$上的非负连续函数，可知

$$P(x)W'^2(x)+r(x)W^2(x)\equiv 0$$

于是$P(x)W'^2(x)=0$

但 $P(x)>0$ 在$[a,b]$成立，所以

$$W'^2(x)\equiv 0$$

于是$W'(x)\equiv 0$

所以

$W(x)=C$ （常数）

又 $W(a)=0=W(b)$ 可见$W(x)\equiv 0$

这就是说，只要$V(x)$不恒等于$u_0(x)$，则

$$Q[V(x)]=Q[u_0(x)]+\int_a^b [PW'^2+rW^2]dx>Q[u_0(x)]$$

可见泛函$Q[u(x)]$在(39)的解$u_0(x)$上达到最小值$Q[u_0(x)]$。

2）设泛函$Q[u(x)]$在 $u_0(x)\in C_0^2[a,b]$ 上达到最小值$Q[u_0(x)]$。现在，任取$W(x)\in C_0^2[a,b]$，对任何实数λ来说①，显然有

$$\begin{aligned}&Q[u_0(x)+\lambda W(x)]\\&=Q[u_0(x)]+\int_a^b [P(\lambda W')^2+r(\lambda W)^2]dx\\&\quad+2\int_a^b [P_0u_0'(\lambda W')+ru_0(\lambda W)\\&\quad-f(\lambda W)]dx\geqslant Q[u_0(x)]\end{aligned}$$

当$u_0(x)$及$W(x)$固定时，

$$\int_a^b [P(\lambda W')^2+r(\lambda W)^2]dx+2\int_a^b [P_0u_0'(\lambda W')+ru_0(\lambda W)-f(\lambda W)]dx$$

---

① 指对任何$u(x)\in C_0^2[a,b]$来说，有$Q[u(x)]\geqslant Q[u_0(x)]$

可视为λ的函数，将它记为$\varphi(\lambda)$，于是

$$\varphi(\lambda)=\lambda^2\int_a^b(PW'^2+rW^2)dx$$
$$+2\lambda\int_a^b[P_0u_0'W'+ru_0W-fW]dx$$
$$\geqslant 0$$

对于二次三项式$A\lambda^2+B\lambda+C$来说，若

$$A\lambda^2+B\lambda+C\geqslant 0$$

对任何实数成立，则$B^2-4AC\leqslant 0$。这时，若$C=0$则$B^2\leqslant 0$，所以$B=0$。由此可见

$$\int_a^b(P_0u_0'W'+ru_0W-fW)dx=0$$

所以

$$\int_a^b[-(P_0u_0')'+ru_0-f]Wdx=0$$①

对任何$W(x)\in C_0^2[a,b]$成立。由此可以证明②

$$-(P_0u_0)'+ru_0-f\equiv 0$$

于是$u_0(x)$是问题(39)的解。

事实上，若在某一点$x_0\in(a,b)$，有

$$-(P_0(x_0)u_0'(x_0))'-r(x_0)u_0(x_0)-f(x_0)>0$$

我们就取一个函数$\eta(x)$，它在x_0点附近大于零，在其余位置上为零，且$\eta(x)\in C_0^2[a,b]$，于是

$$\int_a^b[-(P(x)u_0'(x))'-r(x)u_0(x)-f(x)]\eta(x)dx>0$$

这就引起矛盾。同样，若

$$-(P(x_0)u_0'(x_0))'-r(x_0)u_0(x_0)-f(x_0)<0$$

也导致矛盾。可见

---

① 在这里用到$\int_a^b p_0u_0'W'dx=P_0u_0'W\Big|_a^b-\int_a^b(P_0u_0)'Wdx$

$$=-\int_a^b(P_0u_0')'Wdx$$

② 参看本书第二章§2之2中的“推广的预备定理”。

$$-(P(x)u_0'(x))'-r(x)u_0(x)-f(x)\equiv 0$$

这就是说，$u_0(x)$是(39)的解。

我们证明了：$u_0(x)$是(39)的解的充分且必要的条件是：泛函$Q[u(x)]$在$u_0(x)$上取最小值。

这就是说：求$u_0(x)\in C_0^2[a,b]$，使泛函(40)取最小值与解问题(39)是等价的。

由于这个发现，事情发生了逆转。刚才提出的任务是解(39)，现在我们掉过头来求$u_0(x)$，使泛函$Q[u_0(x)]$取最小值。

里兹法是解决这个问题的一种近似方法，大致如下：

为求$u(x)\in C_0^2[a,b]$，使泛函

$$Q[u(x)]=\int_a^b[-(P(x)u'(x))'u(x)+r(x)u^2(x)-2f(x)u(x)]dx$$

取最小值，我们选取基函数

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)\qquad \varphi_i(x)\in C_0^2[a,b]\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

设它们是线性无关的。令

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x)=u_n(x)①$$

$a_1,a_2,\cdots,a_n$为任意实数。于是，泛函$Q[u_n(x)]$成了$a_1,a_2,\cdots,a_n$的函数。

为简化书写方式，记积分

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=(f,g),$$

把它称为f和g这两个函数的内积。于是

$$Q[u(x)]=\int_a^b[-(Pu')'u+ru^2-2fu]dx$$

---

① 这就是说，若$a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)\equiv 0$当$x\in[a,b]$时成立，则常数$a_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$

$$=(Lu①, u)-2(f, u)$$

由Lu的定义可知

$L(b_1u_1+b_2u_2)=b_1\cdot Lu_1+b_2\cdot Lu_2$对任何数$b_1$、$b_2$成立。因此，我们说算子$L$是线性的。又

$$(f, b_1g_1+b_2g_2)=b_1(f, g_1)+b_2(f, g_2)$$

$$(b_1f_1+b_2f_2, g)=b_1(f_1, g)+b_2(f_2, g)$$

所以

$$Q[u_n(x)]=(Lu_n, u_n)-2(f, u_n)$$

$$=(L(\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i), \sum_{j=1}^{n}a_j\varphi_j)$$

$$-2(f, \sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i)$$

$$=\sum_{i, j=1}^{n}a_ia_j(L\varphi_i, \varphi_j)-2\sum_{i=1}^{n}a_i(f_i, \varphi_i)$$

$$=F(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

在此，$F(a_1, \cdots, a_n)$表示$Q[u_n(x)]$是$a_1, \cdots a_n$诸变量的函数。

现在选取$a_1, a_2, \cdots, a_n$，使$Q[u_n]=F(a_1, \cdots, a_n)$取最小值。用数学分析中的老办法求极值，即由

$$\frac{\partial F}{\partial a_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

得

$$\sum_{j=1}^{n}2a_j(L\varphi_i, \varphi_j)=2(f, \varphi_i)②$$

---

① Lu的意义见（39）式。

② 注意 $\sum_{i, j=1}^{n}a_ia_j(L\varphi_i, \varphi_j)=a_1a_1(L\varphi_1, \varphi_1)+a_1a_2(L\varphi_1, \varphi_2)+\cdots$
$+a_1a_n(L\varphi_1, \varphi_n)+a_2a_1(L\varphi_2\varphi_1)+a_2a_2(L\varphi_2, \varphi_2)$
$+\cdots+a_2a_n(L\varphi_2, \varphi_n)+\cdots+a_na_1(L\varphi_n, \varphi_1)$
$+a_na_2(L\varphi_n, \varphi_2)+\cdots+a_na_n(L\varphi_n, \varphi_n)$

所以 $$\sum_{j=1}^{n} a_j(L\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{43}$$

这是关于$a_1, a_2, \cdots, a_n$的线性方程组。解出(43)，得到a_1，$a_2, \cdots, a_n$的值，也就得到 $u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x)$。我们利用

$$\begin{aligned}(L\varphi_i, \varphi_j) &= \int_a^b [-(P\varphi_i')'\varphi_j + r\varphi_i\varphi_j]dx \\ &= -P\varphi_i'\varphi_j \Big|_a^b + \int_a^b [P\varphi_i'\varphi_j' + r\varphi_i\varphi_j]dx \\ &= \int_a^b [P\varphi_i'\varphi_j' + r\varphi_i\varphi_j]dx\end{aligned}$$

（注意$\varphi_j(a) = 0 = \varphi_j(b)$）

再记

$$\int_a^b [P\varphi_i'\varphi_j' + r\varphi_i\varphi_j]dx = B(\varphi_i, \varphi_j) = k_{ij}$$

又令

$$(f, \varphi_i) = b_i$$

于是方程组(43)可表为

$$\begin{cases} k_{11}a_1 + k_{12}a_2 + \cdots + k_{1n}a_n = b_1 \\ k_{21}a_1 + k_{22}a_2 + \cdots + k_{2n}a_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{n1}a_1 + k_{n2}a_2 + \cdots + k_{nn}a_n = b_n \end{cases} \tag{44}$$

或用矩阵记号，写成

$K \cdot A = B$

在此

$K = [k_{ij}]$

$A^T = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \qquad B^T = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$①

---

① A^T表示矩阵A的转置矩阵。为便于排版，才这样书写。

现在证明矩阵K是对称正定的，于是方程(44)存在唯一解（初学者可以暂时不看以下几行文字。要搞清楚的话，请参阅线性代数课本）。

因为

$$k_{ij}=\int_a^b[P\varphi_i'\varphi_j'+r\varphi_i\varphi_j]dx=k_{ji}$$

所以矩阵K是对称的。再证明矩阵K是正定的，即当

$$C^T=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\neq 0\ ①$$

时，

$$C^TKC>0\quad（注意C^TKC是一个实数）$$

事实上

$$C^TKC=[c_1,\cdots,c_n][k_{ij}]\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^n c_i\sum_{j=1}^n k_{ij}c_j$$

$$=\sum_{i,j=1}^n c_ic_jk_{ij}=\sum_{i,j=1}^n c_ic_jB(\varphi_i,\varphi_j)$$

$$=\sum_{i,j=1}^n c_ic_j\int_a^b[P\varphi_i'\varphi_j'+r\varphi_i\varphi_j]dx$$

$$=\int_a^b[P\left(\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i\right)'\left(\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j\right)'$$

$$+r\left(\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i\right)\left(\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j\right)]dx$$

$$=B\left(\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i,\ \sum_{j=1}^n c_j\varphi_j\right)$$

$$=B(u_n(x),u_n(x))$$

在此处

① 在此处0表示零矢量（0，0，…，0）。

$$u_n(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x)$$

当 $c\neq 0$ （即$c_1,c_2,\cdots,c_n$不全为 0 ）时，这时

$u_n(x)$不恒为零①，所以只要能证明有$\delta>0$存在，使

$$C^TKC=\int_a^b[P(u_n')^2+r(u_n)^2]dx\geqslant\delta\int_a^b u_n^2dx$$

则由

$$\int_a^b u_n^2dx>0$$

可知

$$C^TKC>0$$

故矩阵K正定。

现在来证这种正数δ确实存在。因为

$$\int_a^x u'(t)dt=u(x)\qquad(\text{注意}u\in C_0^2[a,b]\ \therefore u(a)=0)$$

又

$$\left|\int_c^d\varphi(x)\psi(x)\,dx\right|\leqslant\sqrt{\int_c^d\varphi^2(x)\,dx}\sqrt{\int_c^d\psi^2(x)dx}\ ② \tag{45}$$

所以

$$\int_a^b u^2(x)\,dx=\int_a^b\Big[\int_a^x u'(t)dt\Big]^2dx\leqslant$$

$$\int_a^b\Big[\Big(\int_a^x u'^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_a^x 1dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]^2dx$$

$$\leqslant\int_a^b\Big[\Big(\int_a^b u'^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(x-a\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]^2dx$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b u'^2(t)dt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b u'^2(x)dx$$

---

① 因为$\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$线性无关。

② 通常把此不等式称为许瓦尔兹不等式。请参看斯米尔诺夫所著《高等数学教程》第五卷第一分册第二章第55节定理 3。

于是

$$\int_a^b u'^2(x)dx \geqslant \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b u^2(x)dx$$

$$\int_a^b [Pu'^2_n + ru^2_n]dx$$

$$\geqslant \int_a^b [\min_{x\in[a,b]} P(x)\cdot u'^2_n + ru^2_n]dx$$

$$\geqslant \int_a^b [\min_{x\in[a,b]} P(x)\cdot \frac{2}{(b-a)^2}u^2_n + ru^2_n]dx$$

$$> \int_a^b \left[\min P(x)\cdot \frac{2}{b-a}\right]u^2_n dx$$

$$= \delta\int_a^b u^2_n(x)dx$$

在此

$$\delta = \min_{x\in[a,b]} P(x)\cdot\frac{2}{b-a}$$

由矩阵K正定，可知方程组(42)有唯一解$(a_1^0,\cdots,a_n^0)$。

再将函数$F(a_1,\cdots,a_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_i a_j k_{ij} - 2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$对$a_i$，$a_j$求导两次，得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial a_j} = 2k_{ij}$$

可见矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial a_j}\right)$$

亦正定，所以函数$F(a_1,\cdots,a_n)$确实在$(a_1^0,\cdots,a_n^0)$处取极小值。但$F(a_1,\cdots,a_n)$是二次函数，所以此极小值也就是F的最小值。

当然，当n取定后，泛函$Q[u_n(x)]$的最小值不一定就是泛函$Q[u(x)]$当$u(x)\in C_0^2[a,b]$时的最小值。但是，在数学上证明了一个重要结论，就是：对于每个n，我们用上述办法（即里兹法）求出$(a_1^0,\cdots,a_n^0)$，得到

$$u_n(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i^0\varphi_i(x)$$

把它们称为"变分问题的近似解"①，把这种

$$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x),\cdots$$

序列称为这一变分问题的"极小化序列"，记此变分问题的精确解为$u_0(x)$。有

$$\int_a^b|u_n(x)-u_0(x)|^2dx\to 0\quad（当\ n\to\infty）$$

也就是说，由里兹法得到的极小化序列$\{u_n(x)\}$平方平均收敛于变分问题的精确解$u_0(x)$。

这样，我们用里兹法解决问题才有了稳固的理论基础。

我们在理论上稍微走远了一点。虽然我们已经声明初学者在读第一遍时可以不理会这些，但总是一种心理上的负担。为了缓和紧张气氛，还是来看一个例子吧。

例 求函数$u(x)\in C^2[0,1]$，使它满足

$$\begin{cases}u''(x)-u(x)=x & x\in(0,1)\\ u(0)=0=u(1)\end{cases}$$

这方程可在(39)中令$P(x)\equiv 1\equiv r(x)$，$f(x)\equiv -x$而得。此方程的满足边值条件$u(0)=0=u(1)$的精确解是

$$u(x)=\frac{e}{e^2-1}(e^x-e^{-x})-x ②$$

现在用里兹法求近似解，以资比较。

取$\varphi_1(x)=x(1-x)$，$\varphi_2(x)=x^2(1-x)$，$\varphi_3(x)=x^3(1-x)$

显然 $$\varphi_i(0)=0=\varphi_i(1)$$

且$\varphi_i(x)$在$[a,b]$有二阶连续导数，也就是说

$$\varphi_i(x)\in C_0^2[a,b]\qquad(i=1,2,3)$$

---

① 我们把"求$u(x)\in C_0^2[a,b]$，使泛函$Q[u(x)]$取最小值"称为"变分问题"。

② 此解可用Lagrange变易常量法求得。请参阅常微分方程教本。

还可以验证$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$是线性无关的①。所以它们可以选为基函数。

用

$$k_{ij}=\int_0^1[\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)+\varphi_i(x)\varphi_j(x)]dx$$

$$(i,j=1,2,3)$$

可得

$k_{11}=0.3667$ $\quad k_{12}=0.1833$ $\quad k_{13}=-0.1763$

$k_{21}=k_{12}$ $\quad k_{22}=0.1333$ $\quad k_{23}=-0.8940$

$k_{31}=k_{13}$ $\quad k_{32}=k_{23}$ $\quad k_{33}=0.0897$（取近似值）

又

$$b_1=\int_0^1 f\varphi_1 dx=\int_0^1 -x^2(1-x)dx=-\frac{1}{12}$$

$$b_2=\int_0^1 f\varphi_2 dx=\int_0^1 -x^3(1-x)dx=-\frac{1}{20}$$

$$b_3=\int_0^1 f\varphi_3 dx=\int_0^1 -x^4(1-x)dx=-\frac{1}{30}$$

由此得到线性方程组

$$\begin{cases}0.3667a_1+0.1833a_2-0.1763a_3=-\dfrac{1}{12}\\[2mm] 0.1833a_1+0.1333a_2-0.8940a_3=-\dfrac{1}{20}\\[2mm] -0.1763a_1-0.8940a_2+0.0897a_3=-\dfrac{1}{30}\end{cases}$$

解此方程组得

$a_1=-0.4425,\quad a_2=0.4635,\quad a_3=0.0343$

由此得到近似解

$$u_3(x)=-0.4425x(1-x)+0.4635x^2(1-x)+0.0343x^3(1-x)$$

---

① 若$C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+C_3\varphi_3\equiv 0$，则$-C_3x^4+(C_3-C_2)x^3+(C_2-C_1)x^2+C_1x\equiv 0$于是$-C_3=0=C_3-C_2=C_2-C_1=C_1$，从而$C_1=0=C_2=C_3$

$$= -0.0343x^4 - 0.4292x^3 + 0.9060x^2 - 0.4425x$$

试选点 $x=\frac{1}{2}$，算出精确解 $u(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的值 $u\left(\frac{1}{2}\right)$，又算出 $u_3\left(\frac{1}{2}\right)$，作一比较，以观察近似解误差的大小。

$$u\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e}{e^2-1}\left(e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{2}$$
$$=-0.0566$$

$$u_3\left(\frac{1}{2}\right)=-0.0343\left(\frac{1}{2}\right)^4-0.4292\left(\frac{1}{2}\right)^3+0.9060\left(\frac{1}{2}\right)^2-0.4425\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=-0.0505$$

现在对于点 $x=\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$，分别求出近似值 $u_3(x)$ 及准确值 $u(x)$①并列表如下：

表 1

节　　点	准确值 $u(x)$	近似值 $u_3(x)$
$x=\frac{1}{8}$	−0.0191	−0.0420
$x=\frac{2}{8}$	−0.0350	−0.0609
$x=\frac{3}{8}$	−0.0484	−0.0618
$x=\frac{4}{8}$	−0.0566	−0.0505
$x=\frac{5}{8}$	−0.0579	−0.0327
$x=\frac{6}{8}$	−0.0503	−0.0142
$x=\frac{7}{8}$	−0.0317	−0.0017

看来误差还不算小，但是要注意，我们只取了三个基函数($n=3$)呵！

① 这里的准确值当然有舍入误差。

2. 里兹法的计算步骤

上面已经详细地讲了一个特例，现在把里兹法的计算步骤总结如下：

设M是一个函数类。函数类M中的任何函数$u(x)$均满足给定的边值条件和一定的光滑性（在上文中，$M=C_0^2[a,b]$。在各种问题中，M可取成各种类型）。要求出$u_0(x)\in M$，使泛函$Q[u(x)]$取最小值。这是一个变分问题。

我们用里兹法求此变分问题的近似解。步骤是：

1）在函数类M中，选取线性无关的几个基函数$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$。作

$$u_n(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x)$$

记 $$M_n=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x)\ \middle|\ a_1,a_2,\cdots,a_n\text{取一切实数}\right\}$$

这时泛函

$$Q[u_n(x)]=Q\left[\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x)\right]$$
$$=F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

也就是说，它是变元$a_1,a_2,\cdots,a_n$的n元函数。

2）求出$a_1^0,a_2^0,\cdots,a_n^0$，使函数$F(a_1,\cdots,a_n)$在（$a_1^0,a_2^0,\cdots a_n^0$）处取最小值，即

$$F(a_1^0,a_2^0,\cdots,a_n^0)=\min_{u(x)\in M_n}Q[u(x)]$$①

办法是取$\dfrac{\partial F}{\partial a_i}=0$

得到线性方程组(44)，即

$$K\cdot A=B$$

解此方程组，求出（$a_1^0,a_2^0,\cdots,a_n^0$），在一定条件下，$u_n(x)=$

① 显然 $\min\limits_{u(x)\in M_n}Q[u(x)]\geq\min\limits_{u(x)\in M}Q[u(x)]$

$\sum_{i=1}^{n} a_i^0 \varphi_i(x)$使泛函$Q[u(x)]$在$M_n$中取最小值

$Q[u_n(x)] = \min_{u(x)\in M_n} Q[u(x)]$，且

$$\int_a^b |u_n(x) - u_0(x)|^2 dx \to 0 \quad (\text{当 } n \to \infty)$$

（$u_0(x)$是变分问题的精确解）

这就是里兹法的基本轮廓。

§2 有 限 元 法

在用里兹法求泛函$Q[u(x)]$的极值函数①$u_0(x)$的近似解时，我们先选取试探函数$\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$（即上文所说的基函数），求$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x)$，使泛函$Q[u_n(x)]$在试探函数类$M_n$上取最小值。把这个$u_n(x)$作为$u_0(x)$的近似解。这个方法的指导思想是容易理解的。一般说来，也收敛得比较快（指n不太大时，误差比较小）。但是，里兹法对试探函数$\varphi_i(x)$的光滑性要求较高。对于边界曲线比较复杂的二维区域（高于二维的区域更不待言），要构造出这种试探性函数往往是困难的，有时还是不可能的。此外当n增大时，精度提高很慢（注意这与上文中所说的“当n不太大时误差比较小”并不矛盾）。面对这种情况，有些人对$\varphi_i(x)$的光滑性降低要求，干脆选取分片多项式（见下文）作为$\varphi_i(x)$。这种基函数仅仅连续，在有些点连导数也没有，这就扩大了试探函数类的范围。当时，人们难以估计到的是：这种做法居然引起了计算方法的巨大变革！产生了现代的适用于广阔领域的有限元法。本节打算从变分法的角度介绍一下有限元法的指导思想。

再来看一下问题（39）。我们已经知道，只要求出$u_0(x)$，

① 指泛函$Q[u(x)]$在$u_0(x)$上取极值。

使（40）式所表示的泛函$Q[u(x)]$取最小值，则$u_0(x)$是（39）的解。但泛函$Q[u(x)]$可按下式进行变换：

$$\begin{aligned}Q[u(x)]&=\int_a^b[-(P(x)u'(x))'u(x)\\&\quad+ru^2(x)-2f(x)u(x)]dx\\&=-P(x)u'(x)u(x)\Big|_a^b\\&\quad+\int_a^b[P(x)u'^2(x)+ru^2(x)-2f(x)u(x)]dx\\&=\int_a^b[Pu'^2+ru-2fu]dx\end{aligned}$$

（注意$u(a)=0=u(b)$）

现在，我们用有限元法来求$u_0(x)$，使泛函

$$Q[u(x)]=\frac{1}{2}\int_a^b[Pu'^2+ru^2-2fu]dx\text{①} \qquad (46)$$

在$u_0(x)$上取最小值。

1）选取分片多项式作为基函数（这是关键问题）。我们要作出一个由线段连接而成的函数$V(x)$，使它在$[a,b]$上满足

$$V(x_i)=u(x_i)=u_i \quad (i=0,1,2,\cdots,n)$$

（取$a=x_0$，$b=x_n$）

（见图13）

取
$$\varphi_0(x)=\begin{cases}(x_1-x)/h_1 & \text{当 } x\in[x_0,\ x_1]\\ 0 & \text{当 } x\,\overline{\in}[x_0,\ x_1]\end{cases}$$

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}(x-x_0)/h_1 & \text{当 } x\in[x_0,\ x_1]\\(x_2-x)/h_2 & \text{当 } x\in[x_1,\ x_2]\\ 0 & \text{当 } x\in[x_2,\ x_n]\end{cases}$$

---

① 为便于推导有关公式，我们在原来的$Q[u(x)]$表达式前乘以$\frac{1}{2}$。若$u_0(x)$使$\int_a^b[Pu'^2+ru^2-2fu]dx$取最小值，则$u_0(x)$也使$\frac{1}{2}\int_a^b[Pu'^2+ru^2-2fu]dx$取最小值。反过来，有类似结论。

$$\varphi_j(x)=\begin{cases}(x-x_{j-1})/h_j & \text{当}x\in[x_{j-1},x_j]\\(x_{j+1}-x)/h_{j+1} & \text{当}x\in[x_j,x_{j+1}]\\0 & \text{当}x\in[x_{j+1},x_n]\cup[x_0,x_{j-1}]\end{cases}$$

又

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}0 & \text{当}x\overline{\in}[x_{n-1},x_n]\\(x-x_{n-1})/h_n & \text{当}x\in[x_{n-1},x_n]\end{cases}$$

$\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x)$及$\varphi_n(x)$分别如图13b、c、d所示。

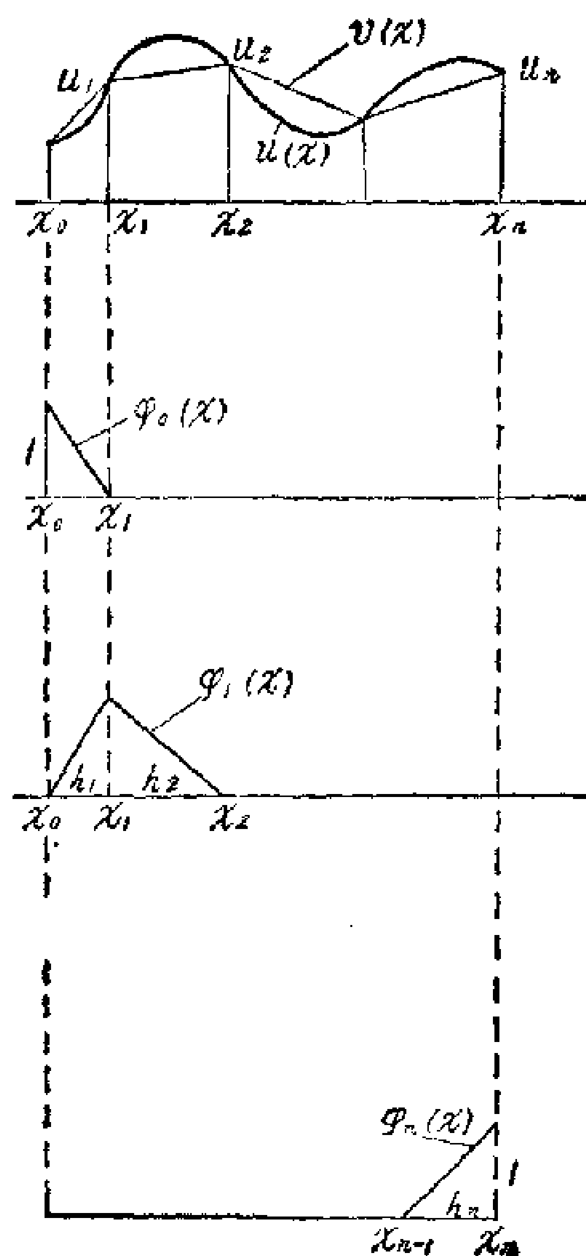


图 13

将图13 a、b、c、d 联系起来观察，可以看出

$$V(x)=\sum_{j=0}^{n} u_j\varphi_j(x)$$

刚才选取的$\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x)$，…，$\varphi_n(x)$都是分片多项式的最简单情形（即分片线性多项式），在有限元法中，这是很重要的基函数！现在将有限元法文献中关于$\varphi_i(x)$等的通用术语介绍一下：

区间 (x_{i-1},x_i) 称"单元"，记作 e_i。x_0，x_1，…，x_n都叫"节点"。又定义如下函数

$$N_1^{(j)}(x)=(x_j-x)/h_j$$

(47)

$$N_2^{(j)}(x)=(x-x_{j-1})/h_j$$

把它们都叫做"形函数"。于是，上述基函数可表为：

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}N_1^{(1)}(x) & \text{当 } x\in e_1\\ 0 & \text{当 } x\overline{\in} e_1\end{cases} \tag{48}$$

又当 $0<j<n$，有

$$\varphi_j(x)=\begin{cases}N_2^{(j)}(x) & \text{当 } x\in e_j\\ N_1^{(j+1)}(x) & \text{当 } x\in e_{j+1}\\ 0 & \text{当 } x\overline{\in} e_j\cup e_{j+1}\end{cases} \tag{49}$$

又

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}N_2^{(n)}(x) & \text{当 } x\in e_n\\ 0 & \text{当 } x\overline{\in} e_n\end{cases} \tag{50}$$

这些式子虽然难懂些，但只要用得多了，也就熟了。

取定$u_0=P_0$，其余u_1，u_2，…，u_n任意变化，则函数$V(x)=\sum_{i=0}^{n} u_i\varphi_i(x)$ 的全体组成试探函数类M_n。用集合记号表示，就是

$$M_n=\left\{\sum_{i=0}^{n} u_i\varphi_i(x)\ \middle|\ u_0=P_0,u_1,u_2,\cdots,u_n\text{取任意实数}\right\}$$

任取$V(x)\in M_n$，显然$V(a)=P_0$。又因为

$$\varphi_i(x_j)=\begin{cases}0 & 当\ i\neq j^{①}\\ 1 & 当\ i=j\end{cases}$$

所以

$$V(x_j)=\sum_{i=0}^{n}u_i\varphi_i(x_j)=u_j\varphi_j(x_j)=u_j$$

这样，我们已经用节点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

将区间(a,b)划分为n个单元$e_j=(x_{j-1},x_j)$（$j=1,\cdots,n$），选定了基函数$\{\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x)\}$，并构造了试探函数

$$V(x)=\sum_{i=0}^{n}u_i\varphi_i(x)$$

2）按单元写出单元矩阵

和里兹法一样，下面的工作是要在试探函数类M_n中，求出一个函数$u_n(x)=\sum_{i=0}^{n}u_i^{*}\varphi_i(x)$，使泛函$Q[V(x)]$在这个$u_n(x)$上取最小值，即

$$\min_{V(x)\in M_n}Q[V(x)]=Q[u_n(x)]$$

当$V(x)\in M_n$，这时

$$Q[u(x)]=Q\left[\sum_{i=0}^{n}u_i\varphi_i(x)\right]=F(u_1,u_2,\cdots,u_n)$$

注意到$u_0=P_0$已经事先固定，所以当$V(x)$在M_n类中变化时，泛

---

①由此可以证明$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$线性无关。事实上若$\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i(x)\equiv0$，取$x=x_j$，则$\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i(x_j)=c_j=0$（$j=0,1,\ \cdots,\ n$）

函$Q[V(x)]$是u_1, u_2, …, u_n的n元函数。只要再用（这也和里兹法一样）

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{51}$$

写出关于$u_1,u_2,\cdots,u_n$的线性方程组，再解出$u_1^0,u_2^0,\cdots,u_n^0$，就得到近似解

$$u_n(x)=\sum_{i=0}^{n}u_i^0\varphi_i(x) \quad (\text{取}u_0^0=u_0=P_0)$$

但在单元e_j较多时，为使计算工作有条不紊，人们总是先按单元写出单元矩阵，再组合成总矩阵，才得到方程组（51）的。具体说来，因为

$$\begin{aligned}Q[V]&=\frac{1}{2}\int_a^b[PV'^2+rV^2-2fV]dx\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\int_{x_{j-1}}^{x_j}[PV'^2+rV^2-2fV]dx\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\int_{e_j}[PV'^2+rV^2-2fV]dx=\sum_{j=1}^{n}Q_j\end{aligned}$$

在此，

$$Q_j=\frac{1}{2}\int_{e_j}[PV'^2+rV^2-2fV]dx$$

注意 $V(x)=\sum_{j=0}^{n}u_i\varphi_i(x)$，在$e_j$单元，$x_{j-1}<x<x_j$这时只有$\varphi_j(x)$和$\varphi_{j-1}(x)$不为零（见图14）。再说详细点，在$e_j$单元上，

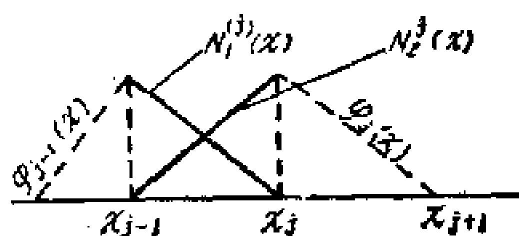


图 14

$$\varphi_j(x)=N_2^{(j)}(x)=(x-x_{j-1})/h_j$$
$$\varphi_{j-1}(x)=N_1^{(j)}(x)=(x_j-x)h_j$$

所以在单元e_j上

$$V(x)=u_{j-1}\varphi_{j-1}(x)+u_j\varphi_j(x)$$
$$=u_{j-1}N_1^{(j)}(x)+u_jN_2^{(j)}(x)$$

$$Q_j=\frac{1}{2}\int_{e_j}[PV'^2+rV^2-2fV]$$
$$=\frac{1}{2}\int_{e_j}\Big[P\Big(u_{j-1}\frac{dN_1^{(j)}}{dx}+u_j\frac{dN_2^{(j)}}{dx}\Big)^2$$
$$+r(u_{j-1}N_1^{(j)}+u_jN_2^{(j)})^2-2f(u_{j-1}N_1^{(j)}+u_jN_2^{(j)})\Big]dx$$
$$=\frac{1}{2}u_{j-1}^2\int_{e_j}\Big[P\Big(\frac{dN_1^{(j)}}{dx}\Big)^2+r(N_1^{(j)})^2\Big]dx$$
$$+u_{j-1}u_j\int_{e_j}\Big[P\frac{dN_1^{(j)}}{dx}\frac{dN_2^{(j)}}{dx}+rN_1^{(j)}N_2^{(j)}\Big]dx$$
$$+\frac{1}{2}u_j^2\int_{e_j}\Big[P\Big(\frac{dN_2^{(j)}}{dx}\Big)^2+r(N_2^{(j)})^2\Big]dx$$
$$-u_{j-1}\int_{e_j}fN_1^{(j)}(x)dx-u_j\int_{e_j}fN_2^{(j)}(x)dx$$

令

$$k_{\alpha\beta}^j=\int_{e_j}\Big[P\frac{dN_\alpha^{(j)}}{dx}\frac{dN_\beta^{(j)}}{dx}+rN_\alpha^{(j)}N_\beta^{(j)}\Big]dx$$

$$b_\alpha^j=\int_{e_j}fN_\alpha^{(j)}(x)dx \tag{52}$$

$$(\alpha,\beta=1,2\quad j=1,\cdots,n)$$

则

$$Q_j=\frac{1}{2}k_{11}^ju_{j-1}^2+k_{12}^ju_{j-1}u_j+\frac{1}{2}k_{22}^ju_j^2-b_1^ju_{j-1}-b_2^ju_j$$

我们要写出导数

$$\frac{\partial Q}{\partial u_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_j}{\partial u_i}$$

来。因为

$$Q_i=\frac{1}{2}k_{11}^iu_{i-1}^2+k_{12}^iu_{i-1}u_i$$

$$+\frac{1}{2}k_{22}^{i}u_{i}^{2}-b_{1}^{i}u_{i-1}-b_{2}^{i}u_{i}$$

所以

$$Q_{i+1}=\frac{1}{2}k_{11}^{i+1}u_{i}^{2}+k_{12}^{i+1}u_{i}u_{i+1}$$
$$+\frac{1}{2}k_{22}^{i+1}u_{i+1}^{2}-b_{1}^{i+1}u_{i}-b_{2}^{i+1}u_{i+1}$$

可以看出其余Q_j中不含u_i，所以

$$\frac{\partial Q}{\partial u_i}=\sum_{j=1}\frac{\partial Q_j}{\partial u_i}=\frac{\partial Q_i}{\partial u_i}+\frac{\partial Q_{i+1}}{\partial u_i}$$
$$=k_{12}^{i}u_{i-1}+k_{22}^{i}u_{i}-b_{2}^{i}+k_{11}^{i+1}u_{i}+k_{12}^{i+1}u_{i+1}-b_{1}^{i+1}$$

现在，只要令$\frac{\partial Q}{\partial u_i}=0$，就得到关于$u_i$的线性方程组了。但是，我们打算在每个单元$e_i$上求出单元矩阵，再组合成总矩阵。所以，对于$Q_i$而言，我们先求$\frac{\partial Q}{\partial u_{i-1}}$及$\frac{\partial Q_i}{\partial u_i}$如下

$$\frac{\partial Q_i}{\partial u_{i-1}}=k_{11}^{i}u_{i-1}+k_{12}^{i}u_{i}-b_{1}^{i}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial u}=k_{21}^{i}u_{i-1}+k_{22}^{i}u_{i}-b_{2}^{i} \tag{53}$$

表为矩阵形式。令

$$\begin{pmatrix} k_{11}^{i} & k_{12}^{i} \\ k_{21}^{i} & k_{22}^{i} \end{pmatrix}=K^{i},\quad \begin{pmatrix} b_{1}^{i} \\ b_{2}^{i} \end{pmatrix}=B^{i}$$

于是

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial u_{i-1}} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial u_i} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_{11}^{i} & k_{12}^{i} \\ k_{21}^{i} & k_{22}^{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_{i} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_{1}^{i} \\ b_{2}^{i} \end{pmatrix}$$

$$=K^i\begin{pmatrix}u_{i-1}\\u_i\end{pmatrix}-B^i$$

K^i又称为单元e_i的“单元刚度矩阵”。K^i和B^i都携带着单元e_i贡献的信息。我们按单元逐个算出矩阵K^i和B^i来，就完成了第二个步骤。

3）将刚才得到的单元矩阵 K^i和B^i，组合成总矩阵，写出线性方程组。

这一步骤在许多书上都是通过例题来说明组合规则。但只死记组合规则，是学不好有限元法的。在此拟说明有关组合规则的原理。

由上文可知，我们要写的线性方程组就是

$$\frac{\partial Q}{\partial u_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

也就是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial Q_1}{\partial u_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial u_1}=0\\&\frac{\partial Q_2}{\partial u_2}+\frac{\partial Q_3}{\partial u_2}=0\\&\frac{\partial Q_3}{\partial u_3}+\frac{\partial Q_4}{\partial u_3}=0\\&\cdots\\&\frac{\partial Q_n}{\partial u_n}\qquad\quad=0\end{aligned}\right\}$$

用（53）式，得（注意$k^i_{21}=k^i_{12}$）

$$\frac{\partial Q_1}{\partial u_1}=k^1_{12}u_0+k^1_{22}u_1-b^1_2$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial u_1}=k^2_{11}u_1+k^2_{12}u_2-b^2_1$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial u_2}=k^2_{12}u_1+k^2_{22}u_2-b^2_2$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial u_2}=k^3_{11}u_2+k^3_{12}u_3-b^3_1$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial u_3}=k^3_{12}u_2+k^3_{22}u_3-b^3_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial Q_{n-2}}{\partial u_{n-2}}=k^{n-2}_{21}u_{n-3}+k^{n-2}_{22}u_{n-2}-b^{n-2}_2$$

$$\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial u_{n-2}}=k^{n-1}_{11}u_{n-2}+k^{n-2}_{12}u_{n-1}-b^{n-1}_1$$

$$\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial u_{n-1}}=k^{n-1}_{21}u_{n-2}+k^{n-1}_{22}u_{n-1}-b^{n-1}_2$$

$$\frac{\partial Q_n}{\partial u_{n-1}}=k^n_{11}u_{n-1}+k^n_{12}u_n-b^n_1$$

$$\frac{\partial Q_n}{\partial u_n}=k^n_{12}u_{n-1}+k^n_{22}u_n-b^n_2$$

将它们代入前面的方程组，得

$$\left.\begin{aligned}
&(k^1_{22}+k^2_{11})u_1+k^2_{12}u_2+k^1_{12}u_0-b^1_2-b^2_1=0\\
&k^2_{12}u_1+(k^2_{22}+k^3_{11})u_2+k^3_{12}u_3-b^2_2-b^3_1=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&k^{n-2}_{21}u_{n-3}+(k^{n-2}_{22}+k^{n-1}_{11})u_{n-2}+k^{n-1}_{12}u_{n-1}\\
&\qquad -b^{n-2}_2-b^{n-1}_1=0\\
&k^{n-1}_{21}u_{n-2}+(k^{n-1}_{22}+k^{n}_{11})u_{n-1}+k^n_{12}u_n\\
&\qquad -b^{n-1}_2-b^n_1=0\\
&k^n_{12}u_{n-1}+k^n_{22}u_n-b^n_2=0
\end{aligned}\right\}\qquad(54)$$

再表为矩阵形式

$$K=\begin{bmatrix} k_{22}^{1}+k_{11}^{2} & k_{12}^{2} & 0 & & & & \\ k_{21}^{2} & k_{22}^{2}+k_{11}^{3} & k_{12}^{3} & 0 & & & \\ & k_{21}^{3} & k_{22}^{3}+k_{11}^{4} & k_{12}^{4} & 0 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & k_{21}^{n-2} & k_{22}^{n-2}+k_{11}^{n-1} & k_{12}^{n-1} & \\ & & & & k_{21}^{n-1} & k_{22}^{n-1}+k_{11}^{n} & k_{12}^{n} \\ & & & & & k_{21}^{n} & k_{22}^{n} \end{bmatrix} \quad (55)$$

K即总刚度矩阵，又取

$$B=\begin{pmatrix} b_2^1+b_1^2-k_{12}^1u_0 \\ b_2^2+b_1^3 \\ b_2^3+b_1^4 \\ \vdots \\ b_2^{n-2}+b_1^{n-1} \\ b_2^{n-1}+b_1^n \\ b_2^n \end{pmatrix} \tag{56}$$

$$U^T=[u_1,u_2,\cdots,u_n] \tag{57}$$

则方程组表为

$$KU=B$$

我们设 $u(x_0)=u_0$为已知，得到关于未知量$u_1,\cdots,u_n$的线性方程组（57）。

如果$u(x_0)=u_0$及$u(x_n)=v_0$均为已知，那么未知量就只有$u_1,u_2,\cdots u_{n-1}$了。而且在列方程组时，$\dfrac{\partial Q}{\partial u_n}=0$这一方程也失去意义了。于是，在这种条件下我们得到关于未知量u_1，u_2，…，u_{n-1}的方程组

$$\left.\begin{aligned} &(k_{22}^1+k_{11}^2)u_1+k_{12}^2u_2=b_2^1+b_1^2-k_{12}^1u_0 \\ &k_{12}^2u_1+(k_{22}^2+k_{11}^3)u_2+k_{12}^3u_3=b_2^2+b_1^3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &k_{21}^{n-2}u_{n-3}+(k_{22}^{n-2}+k_{11}^{n-1})u_{n-2}+k_{12}^{n-1}u_{n-1} \\ &=b_2^{n-2}+b_1^{n-1} \\ &k_{21}^{n-1}u_{n-2}+(k_{22}^{n-1}+k_{11}^n)u_{n-1} \\ &=b_2^{n-1}+b_1^n-k_{12}^nV_0 \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

将（58）式表为矩阵形式

$$K^*U=B \tag{59}$$

在此

$$\begin{pmatrix} b_2^1+b_1^2-k_{12}^1u_0 \\ b_2^2+b_1^3 \\ b_2^3+b_1^4 \\ \vdots \\ b_2^{n-2}+b_1^{n-1} \\ b_2^{n-1}+b_1^n-k_{12}^nV_0 \end{pmatrix}=B \tag{60}$$

又总刚度矩阵为

$$K^*=\begin{pmatrix} k_{22}^1+k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & 0 & & \\ k_{21}^2 & k_{22}^2+k_{11}^3 & k_{12}^3 & 0 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & k_{21}^{n-2} & k_{22}^{n-2}+k_{11}^{n-1} & k_{12}^{n-1} \\ & & & & k_{21}^{n-1} & k_{22}^{n-1}+k_{11}^n \end{pmatrix} \tag{61}$$

观察（55）及（61）式，可得总刚度矩阵K和K^*的“拼凑法”，这是进行有限元法实际计算时必需知道的方法。现在，对矩阵K^*的“拼凑法”说明如下（矩阵K的拼凑法与K^*的拼凑很相似，仅仅在矩阵的右下角有些不同。请读者自行分析，最好结合算例，不难作出有关结论）：

对边界单元e_1，算出k_{22}^1。对单元e_2，算出矩阵

$$K^2=\begin{pmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{称}K^2\text{为单元}e_2\text{的贡献矩阵})$$

一般说来，对单元e_j来说，算出贡献矩阵K^j，

$$K^j=\begin{pmatrix} k_{11}^j & k_{12}^j \\ k_{21}^j & k_{22}^j \end{pmatrix} \quad (j=2,3,\cdots,n-1)$$

（注意$k_{21}^j=k_{12}^j$）对边界单元e_n，算出k_{11}^n①。

再将这些矩阵K^j按对角元素位置“焊接”起来，就得到矩阵K^*。焊接方法如下表所示：

① 若拼凑矩阵K，则需算出$\begin{pmatrix} k_{11}^n & k_{12}^n \\ k_{21}^n & k_{22}^n \end{pmatrix}$

$$
k^* = \begin{bmatrix}
k^1_{22} + k^2_{11} & k^2_{12} & & & & & & \\
k^2_{21} & k^2_{22} + k^3_{11} & k^3_{12} & & & & & \\
 & k^3_{21} & k^3_{22} + k^4_{11} & k^4_{12} & & & & \\
 & & k^4_{21} & k^4_{22} + k^5_{11} & k^5_{12} & & & \\
 & & & k^5_{21} & k^5_{22} + k^6_{11} & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & k^{n-2}_{22} + k^{n-1}_{11} & k^{n-1}_{12} \\
 & & & & & & k^{n-1}_{21} & k^{n-1}_{22} + k^{n}_{11}
\end{bmatrix} \qquad (61)'
$$

至于矩阵B的组合，可先按单元e_i求出矩阵

$$B^i=\begin{pmatrix} b_1^i \\ b_2^i \end{pmatrix}$$

再按（60）式算出B。

4）解线性方程组（57）或（59）。由于电子计算机正在普及，如何解线性方程组在这里就不必多说了。只说明总刚度矩阵除了具有对称性、正定性之外，还具有稀疏性。矩阵的每一行至多有三个非零元素①，这就大大减少了计算量。这一点也显示了有限元算法的优越性。

用有限元法解问题（39）的计算步骤已经交代完毕，现在举一例，详细说明计算过程。只要把这个例题的计算过程全部弄懂了，也就进入有限元法的大门了。

例　求解

$$\begin{cases} -u''(x)+u(x)=-x \quad & x\in(0,\ 1) \\ u(0)=0=u(1) \end{cases}$$

（注意这就是在上节中用里兹法解过的例题）

我们在讲有限元法时，从始至终都以变分法为指导思想（实际上有限元法正是在变分法这棵古树上开放的新花）。为了使初学者对有限元法的指导思想更加了解，我们在解这个例题时，先不按上文中总结出的四个步骤来计算，而是更直接地从泛函写出线性方程组，再求其解。

我们已经知道，只要求出$u_0(x)\in c_0^2[0,1]$，使泛函$Q[u(x)]=\int_0^1[u'^2(x)+u^2(x)+2xu(x)]dx$取最小值，则$u_0(x)$是本例题的解。用节点0，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，1将区间$[0,1]$划分为4个单元，即：

① 总刚度矩阵的每一行的零元分布，与单元的编号，排列有关。这一点，在多维问题中看得更清楚。但总刚度矩阵总具有稀疏性。

$$e_1=\left(0,\ \frac{1}{4}\right),\quad e_2=\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right),\quad e_3=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right),$$

$$e_4=\left(\frac{3}{4},\ 1\right)$$

试探函数为

$$u_4(x)=\sum_{i=0}^{4}u_i\varphi_i(x)$$

但$u_0=0=u_4$已经给定，所以

$$u_4(x)=\sum_{i=1}^{3}u_i\varphi_i(x)$$

在单元$e_1=\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$及其两端点，显然试探函数$u_4(x)$是满足$u_4(0)=0$及$u_4\left(\frac{1}{4}\right)=u_1$的线性函数。由图15可知，当$x\in\left[0,\ \frac{1}{4}\right]$时，

$$u_4(x)=\frac{x}{\frac{1}{4}}u_1=4u_1x$$

$$u_4'(x)=4u_1$$

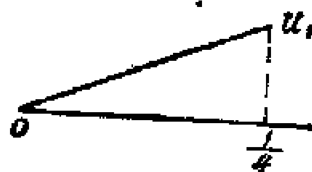


图 15

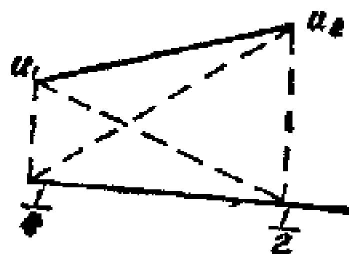


图 16

当$x\in\overline{e_2}=\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right]$时，由图16可见

$$u_4(x)=u_1\left(\frac{1}{2}-x\right)\Big/\frac{1}{4}+u_2\left(x-\frac{1}{4}\right)\Big/\frac{1}{4}$$

$$=u_1(2-4x)+u_2(4x-1)^{①}$$

$$u_4'(x)=4(u_2-u_1)$$

当 $x\in\overline{e_3}=\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right]$时，由图17可见

$$u_4(x)=u_2\left(\frac{3}{4}-x\right)\Big/\frac{1}{4}+u_3\left(x-\frac{1}{2}\right)\Big/\frac{1}{4}$$

$$=u_2(3-4x)+u_3(4x-2)$$

$$u_4'(x)=4(u_3-u_2)$$

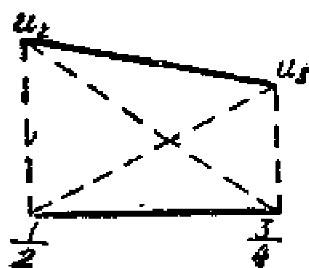


图 17

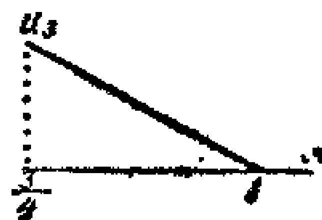


图 18

当 $x\in\overline{e_4}=\left[\frac{3}{4},\ 1\right]$时，由图18可见

$$u_4(x)=u_3(1-x)\Big/\frac{1}{4}=4u_3(1-x)$$

$$u_4'(x)=-4u_3$$

泛函 $Q[u_4(x)]=\sum_{i=1}^{4}Q_i$

$$Q_i=\int_{\frac{i-1}{4}}^{\frac{i}{4}}[u_4'^2(x)+u_4^2(x)+2xu_4(x)]dx$$

$$=\int_{e_i}(u_4'^2+u_4^2+2xu_4)dx$$

现在按单元算出Q_i，

$$Q_1=\int_0^{\frac{1}{4}}[16u_1^2+(4x)^2u_1^2+2x(4x)u_1]dx$$

① 参看（45）式

$$\approx\left(4+\frac{1}{16}\right)u_1^2+\frac{1}{32}u_1 ①$$

$$Q_2=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}[((2-4x)u_1+(4x-1)u_2)^2+16(u_2-u_1)^2$$
$$+2x((2-4x)u_1+(4x-1)u_2)]dx$$
$$\approx\frac{1}{16}(u_1+u_2)^2+4(u_2-u_1)^2+\frac{3}{32}(u_1+u_2)$$

$$Q_3=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}[(u_2(3-4x)+u_3(4x-2))^2+16(u_3-u_2)^2$$
$$+2x((3-4x)u_2+(4x-2)u_3)]dx$$
$$\approx\frac{1}{16}(u_2+u_3)^2+4(u_3-u_2)^2+\frac{5}{32}(u_2+u_3)$$

$$Q_4=\int_{\frac{3}{4}}^{1}[16(1-x)^2u_3^2+16u_3^2+2x\cdot4(1-x)u_3]dx$$
$$\approx\left(\frac{1}{16}+4\right)u_3^2+\frac{7}{32}u_3$$

由此看出，现在泛函 $Q[u_4(x)]$是关于变量u_1，u_2，u_3的二次函数。再取

$$\frac{\partial Q}{\partial u_i}=0\quad(i=1,2,3)$$

就得到关于u_1，u_2，u_3的线性方程组。从刚才的式子中再次看出，Q_1是u_1的函数，Q_2是u_1，u_2的函数，Q_3是u_2，u_3的函数，Q_4是u_3的函数(在上文中曾指出Q_i是u_{i-1}，u_i的函数)，于是

$$\frac{\partial Q}{\partial u_1}=\frac{\partial Q_1}{\partial u_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial u_1}=\left(8+\frac{1}{8}\right)u_1+\frac{1}{32}$$
$$+\frac{1}{8}(u_1+u_2)-8(u_2-u_1)+\frac{3}{32}$$
$$=16\frac{1}{4}u_1+\left(\frac{1}{8}-8\right)u_2+\frac{4}{32}$$

---

① 为统一起见，在计算定积分时，一律用梯形公式或矩形公式求近似值，不管能不能求出原函数。现在用的是$\int_a^b f(x)dx\approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_2}=\frac{\partial Q_2}{\partial u_2}+\frac{\partial Q_3}{\partial u_2}=\frac{1}{8}(u_1+u_2)+8(u_2-u_1)$$

$$+\frac{3}{32}+\frac{1}{8}(u_2+u_3)-8(u_3-u_2)+\frac{5}{32}$$

$$=\left(\frac{1}{8}-8\right)u_1+16\frac{1}{4}u_2+\left(\frac{1}{8}-8\right)u_3+\frac{8}{32}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_3}=\frac{\partial Q_3}{\partial u_3}+\frac{\partial Q_4}{\partial u_3}=\frac{1}{8}(u_2+u_3)+8(u_3-u_2)$$

$$+\frac{5}{32}+\left(\frac{1}{8}+8\right)u_3+\frac{7}{32}$$

$$=\left(\frac{1}{8}-8\right)u_2+16\frac{1}{4}u_3+\frac{12}{32}$$

再令$\frac{\partial Q}{\partial u_i}=0$ $(i=1,2,3)$ 得线性方程组如下：

$$\left.\begin{aligned}16.25u_1-7.875u_2 \qquad\qquad &=-0.125\\ -7.875u_1+16.25u_2-7.875u_3&=-0.25\\ -7.875u_2+16.25u_3&=-0.375\end{aligned}\right\}$$

再表为矩阵形式，即

$$\begin{pmatrix}16.25 & -7.875 & 0\\ -7.875 & 16.25 & -7.875\\ 0 & -7.875 & 16.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.125\\ -0.25\\ -0.375\end{pmatrix}$$

也就是

$$K^*U=B$$

K^*即“总刚度矩阵”，正如上文所指出的，它是一个对称、正定且稀疏的矩阵！

解此线性方程组，得

$$\begin{cases}u_1^0=-0.0354\\ u_2^0=-0.0571\\ u_3^0=-0.0439\end{cases}$$

于是，我们用有限元法得到本例中微分方程边值问题的近似解

$$u_4(x)=\sum_{i=1}^{3}u_i^0\varphi_i(x)$$

详细写出$u_4(x)$的表达式，就是

$$u_4(x)=\begin{cases}-0.1416x \\ \quad 当 x\in\left[0,\ \frac{1}{4}\right] \\ -0.0354(2-4x)-0.0571(4x-1) \\ \quad 当 x\in\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right] \\ -0.0571(3-4x)-0.0439(4x-2) \\ \quad 当 x\in\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right] \\ -0.1756(1-x) \\ \quad 当 x\in\left[\frac{3}{4},\ 1\right]\end{cases}$$

在此表达式中，分别令$x=\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{8},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8}$，得

$$\begin{cases}u_4\left(\frac{1}{8}\right)=-0.0177 \\ u_4\left(\frac{1}{4}\right)=-0.0354 \\ u_4\left(\frac{3}{8}\right)=-0.0463 \\ u_4\left(\frac{1}{2}\right)=-0.0571 \\ u_4\left(\frac{5}{8}\right)=-0.0505 \\ u_4\left(\frac{3}{4}\right)=-0.0439 \\ u_4\left(\frac{7}{8}\right)=-0.0220\end{cases}$$

再将此有限元解与里兹法解及精确解列表比较（表2），以便观察误差分布状况（参看本章§1中的表1）

表 2

节　　点	准　确　值	里兹法解近似值	有限元解近似值
$x=\frac{1}{8}$	-0.0191	-0.0420	-0.0177
$x=\frac{1}{4}$	-0.0350	-0.0609	-0.0354
$x=\frac{3}{8}$	-0.0484	-0.0618	-0.0463
$x=\frac{1}{2}$	-0.0566	-0.0505	-0.0571
$x=\frac{5}{8}$	-0.0579	-0.0327	-0.0505
$x=\frac{6}{8}$	-0.0503	-0.0142	-0.0439
$x=\frac{7}{8}$	-0.0317	-0.0017	-0.0220

如果节点数目增多，像刚才这样先写出泛函 Q，再对 u_i 求导就太麻烦了[①]。所以我们还要学会先按单元求出单元矩阵，再拼成总刚度矩阵 K（或 K^*）及 B 的方法。为使读者能掌握这种方法（就是现在通用的有限元算法），我们对于刚才这个例题，用上文指出的四个步骤再计算一次。

第一步：取节点 0，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，1，将区间〔0，1〕划分为$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$，$\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$和$\left(\frac{3}{4},\ 1\right)$4 个单元。

第二步：按这 4 个单元逐个计算单元矩阵。为阅读方便，把按单元计算时要用的公式汇集如下：

$$k^j_{\alpha\beta}=\int_{e_j}\left[p\frac{dN^{(j)}_\alpha}{dx}\ \frac{dN^{(j)}_\beta}{dx}+rN^{(j)}_\alpha N^{(j)}_\beta\right]dx$$

$$b^j_\alpha=\int_{e_j}fN^{(j)}_\alpha dx$$

① 在实际问题中，节点往往有成千上万的情况。

$$N_1^{(j)}(x)=(x_j-x)/h_j$$

$$(h_j=x_j-x_{j-1})$$

$$N_2^{(j)}(x)=(x-x_{j-1})/h_j$$

在单元e_j上，要算出

$$K^j=\begin{pmatrix} k_{11}^j & k_{12}^j \\ k_{21}^j & k_{22}^j \end{pmatrix}, \qquad B^j=\begin{pmatrix} b_1^j \\ b_2^j \end{pmatrix}$$

因为$u(0)=0=u(1)$，所以我们要用（60）和（61）拼出K^*和B。

现在$x_j=j/4$，　$h_j=\frac{1}{4}$（$j=1,2,3$）

所以

$$N_1^{(j)}(x)=\left(\frac{j}{4}-x\right)\Big/\frac{1}{4}=j-4x,\quad [N_1^{(j)}(x)]'=-4$$

$$N_2^{(j)}(x)=\left(x-\frac{j-1}{4}\right)\Big/\frac{1}{4}=(4x-j+1),$$

$$[N_2^{(j)}(x)]'=4$$

又

$$P(x)\equiv 1\equiv r(x),\quad f(x)=-x$$

所以

$$k_{11}^j=\int_{\frac{j-1}{4}}^{\frac{j}{4}}[(N_1^{(j)})'^2+(N_1^{(j)})^2]dx$$

$$=\int_{\frac{j-1}{4}}^{\frac{j}{4}}[16+(j-4x)^2]dx$$

$$\approx\frac{1}{4}[16+(j-4x)^2]\Big|_{x=\left(\frac{j}{4}+\frac{j-1}{4}\right)\frac{1}{2}}=4\frac{1}{16}$$

$$k_{12}^j=k_{21}^j=\int_{\frac{j-1}{4}}^{\frac{j}{4}}[(N_1^{(j)})'(N_2^{(j)})'+N_1^{(j)}N_2^{(j)}]dx$$

$$=\int_{\frac{j-1}{4}}^{\frac{j}{4}}[-16+(j-4x)(4x-j+1)]dx$$

$$\approx -4+\frac{1}{16}=-\frac{63}{16}$$

$$k_{22}^{j}=\int_{\frac{j-1}{4}}^{\frac{j}{4}}[16+(4x-j+1)^2]dx\approx 4\frac{1}{16}$$

又

$$b_1^j=\int_{\frac{j-1}{4}}^{\frac{j}{4}}(-x)(j-4x)dx$$

$$\approx\frac{1}{4}(-x)(j-4x)\Big|_{x=\frac{1}{2}\left(\frac{j}{4}+\frac{j-1}{4}\right)}=\frac{1-2j}{64}$$

$$b_2^j=\int_{\frac{j-1}{4}}^{\frac{j}{4}}(-x)(4x-j+1)dx\approx\frac{1-2j}{64}$$

所以

$$K^j=\begin{pmatrix}4\frac{1}{16} & -\frac{63}{16}\\ -\frac{63}{16} & 4\frac{1}{16}\end{pmatrix},\qquad B^j=\begin{pmatrix}(1-2j)/64\\ (1-2j)/64\end{pmatrix}$$

由（60）式可知

$$K^*=\begin{pmatrix}4\frac{1}{16}+4\frac{1}{16} & -\frac{63}{16} & 0\\ -\frac{63}{16} & 4\frac{1}{16}+4\frac{1}{16} & -\frac{63}{16}\\ 0 & -\frac{63}{16} & 4\frac{1}{16}+4\frac{1}{16}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 8\frac{1}{8} & -\frac{63}{16} & 0 \\ -\frac{63}{16} & 8\frac{1}{8} & -\frac{63}{16} \\ 0 & -\frac{63}{16} & 8\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

由（60）式得

$$B=\begin{pmatrix} b_2^1+b_1^2 \\ b_2^2+b_1^3 \\ b_2^3+b_1^4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{4}{64} \\ -\frac{8}{64} \\ -\frac{12}{64} \end{pmatrix}$$

于是，得到关于未知量u_1，u_2，u_3的线性方程组

$$\begin{pmatrix} 8\frac{1}{8} & -\frac{63}{16} & 0 \\ -\frac{63}{16} & 8\frac{1}{8} & -\frac{63}{16} \\ 0 & -\frac{63}{16} & 8\frac{1}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ -\frac{2}{16} \\ -\frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

此方程组显然与（61）相同。

第四步：解这个方程组。

这些就是用有限元法解 1 维问题的实际步骤。初学者如把这一节的内容掌握了，就不但学会了关于 1 维问题有限元法的实际计算（特别是关于总刚度矩阵的拼凑法），而且懂得了为什么要这样算。否则，如果只知道机械地按规则计算，遇到复杂的实际问题就难以处理了。

本书是在变分法的基础上来介绍有限元法的。试图使读者在懂得变分法以后，进一步领会有限元法的数学思想。在这种数学思想指导下，透彻地掌握 1 维问题的计算步骤。关于多维问题的

具体计算及实际应用，在这里就不谈了。读者在看完了本章之后，应当参阅其它关于有限元法的书，使自己能够在理解的基础上掌握多维（特别是2维）问题的计算方法。

最后，还须指出，现在已经有关于有限元计算的多种通用程序。读者在熟悉有限元计算以后，再学会使用这些程序，就能在电子计算机上迅速而准确地解决各种实际问题了。

参考文献

〔1〕陈传淼《有限元方法及其提高精度的分析》，湖南科学技术出版社，1982。

〔2〕С.Г.Михин，《二次泛函的极小问题》，科学出版社，1964。

〔3〕С.Г.Михин，Вариационные Методы решения Задач В Математической Физике，Успехи матем наук，T.V Вып.6(40)，1950 1957.

〔4〕姜礼尚、庞之垣，《有限元方法及其理论基础》，人民教育出版社，1980。

〔5〕李荣华，冯果忱，《微分方程数值解法》，高等教育出版社，1980

第二部分 外 推 法

第五章 外 推 法

外推法是一种简便易行而精度又很高的数值解法，在国内掌握了这种方法的人还不多。但这种方法实用价值很高，应当介绍给我国工程技术界。在本章中对这种算法及其应用作一较系统的介绍。

§1 外推法的实例

我们打算先谈两个最简单的问题，从这两个例子中引出外推法的指导思想。

例1 求π的近似值

我们知道直径为1的圆的内接正n边形的周长为

$$d_n = n\sin\frac{\pi}{n}$$

我们知道

$$d_n = \pi\sin\frac{\pi}{n}\Big/\frac{\pi}{n} \longrightarrow \pi \quad (\text{当 } n\to\infty)$$

现在求出d_n，作为π的近似值。

先取$n=12$，得$d_{12}=12\sin\frac{\pi}{12}=3.1058286$　再取$n=24$，得$d_{24}=24\sin\frac{\pi}{24}=3.1326285$这两个值误差都比较大。可是，如果我们用下面这个算式

$$d^* = \frac{1}{3}(4d_{24} - d_{12})$$

对上述d_{12}及d_{24}进行“外推”，就得到

$$d^*=\frac{1}{3}(4\times 3.1326285-3.1058286)$$

$$=3.1415618\approx 3.1416$$

是不是碰巧这样呢？再试一次。这回，我们先求出

$$d_6=6\sin\frac{\pi}{6}=3\,,\quad d_{12}=12\sin\frac{\pi}{12}=3.1058286$$

再用刚才的办法，得

$$d^*=\frac{1}{3}(4d_{12}-d_6)=3.1411048$$

也得出比d_6和d_{12}精确得多的π的近似值。

一般说来，我们先求出π的近似值d_n和d_{2n}，再用如下外推公式

$$d^*=\frac{1}{3}(4d_{2n}-d_n) \tag{62}$$

就得到比d_n和d_{2n}精确得多的近似值d^*。这种由较粗糙的近似值“外推”出较精确近似值的方法，实在太简便了。只要对原来的两个近似值d_n和d_{2n}进行三次算术运算就行了！这样好的算法，我们在实际工作中为什么不用呢？

现在来论证外推公式（62）。由熟知的Taylor公式得

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{\cos\theta x}{5!}x^5\quad(0<\theta<1)$$

所以

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}-\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^3}{n^3}+\frac{\cos\theta\frac{\pi}{n}}{120}\cdot\frac{\pi^5}{n^5}$$

$$=\frac{\pi}{n}-\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^3}{n^3}+C_n\frac{1}{n^5}$$

在此

$$C_n=\frac{\cos\theta\frac{\pi}{n}}{120}\cdot\pi^5$$

$$|C_n| \leqslant \frac{\pi^5}{120}$$

于是

$$d_n = n\sin\frac{\pi}{n} = n\left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^3}{n^3} + C_n\frac{1}{n^5}\right)$$

$$= \pi - \frac{\pi^3}{6}\cdot\frac{1}{n^2} + C_n\frac{1}{n^4}$$

令 $\frac{\pi^3}{6} = C$，则

$$d_n = \pi - \frac{C}{n^2} + \frac{C_n}{n^4} \qquad (63)$$

在（63）式中，常数C与n无关。常数C_n虽然与n有关，但C_n有界，即存在与n无关的正数$M = \frac{\pi^5}{120}$，使

$$|C_n| \leqslant M$$

所以

$$d_{2n} = \pi - \frac{C}{(2n)^2} + \frac{C_{2n}}{(2n)^4} = \pi - \frac{1}{4n^2} + \frac{C_{2n}}{16n^4} \qquad (64)$$

于是

$$4d_{2n} - d_n = 3\pi + \frac{C_{2n}}{4n^4} - \frac{C_n}{n^4}$$

$$\frac{1}{3}(4d_{2n} - d_n) = \pi + \frac{1}{3}\left(\frac{C_{2n}}{4} - C_n\right)\frac{1}{n^4}$$

令

$$\frac{1}{3}\left(\frac{C_{2n}}{4} - C_n\right) = a_n$$

则

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{|C_{2n}|}{4} + |C_n|\right) \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{M}{4} + M\right) = \frac{5}{12}M < M$$

且

$$d^* = \frac{1}{3}(4d_{2n} - d_n) = \pi + a_n\frac{1}{n^4} \qquad (65)$$

由（63）及（64）可知

$$d_n=\pi+O\left(\frac{1}{n^2}\right)^{①}$$

$$d_{2n}=\pi+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

这就是说，误差 $|d_n-\pi|$ 和 $|d_{2n}-\pi|$ 均不低于 $\frac{1}{n^2}$阶（在许多文献中说成“误差为$\frac{1}{n^2}$阶”）。

由（65）式可知

$$d^*=\pi+O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

这就是说， $d^*=\frac{1}{3}(4d_{2n}-d_n)$具有不低于$\frac{1}{n^4}$阶的误差，可见$d^*$比$d_n$和$d_{2n}$的误差小得多！

例 2　求定积分的近似值

对于定积分

$$I=\int_0^1 f(x)dx$$

我们先用梯形公式来求近似值。把区间〔0，1〕分为N个等长的小区间，分点是$x_0=0$，$x_1=\frac{1}{N}$，$x_2=\frac{2}{N}$，…，$x_N=\frac{N}{N}=1$。记

$$f(x_0)=f_0,\quad f(x_1)=f_1,\quad \cdots,\quad f(x_N)=f_N$$

取

$$I_N=\frac{1}{N}\left(\frac{f_0}{2}+f_1+f_2+\cdots+f_{N-1}+\frac{f_N}{2}\right)$$
$$\approx\int_0^1 f(x)dx=I$$

这种公式是大家熟知的。现在，我们要把用梯形公式得到的近似

① 若B_n满足$\left|\frac{B_n}{\frac{1}{n^2}}\right|\leqslant H$（$H$与$n$无关），则记$B_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

值I_N及I_{2N}用外推法处理，得到更好的近似值。

令$\frac{1}{N}=h$，又记I_N为I_h。用著名的尤拉-麦克劳林（Euler-Maclaurin）①公式可证明如下结果，即：若被积函数$y=f(x)$在〔0，1〕上的$2N+2$阶导数$f_{(x)}^{(2N+2)}$连续，则

$$I_h=C_0+C_1h^2+C_2h^4+C_3h^6+\cdots+C_Nh^{2N}+C_{N+1}h^{2N+2} \tag{66}$$

$$C_0=I=\int_0^1 f(x)dx$$

$C_0,C_1,C_2,\cdots,C_N$都是与h无关的常数，系数C_{N+1}有界（即存在与N无关的正数M，使$|C_{N+1}|\leqslant M$对任何N成立）①。所以

$$I_h=I+C_1h^2+O(h^4) \tag{67}$$

（66）及（67）式指出I_h与定积分精确值的关系。它们都称为I_h的渐近展开式。对外推法来说，关键问题就是求出这种渐近展开式。有了这种展开式，就可以用外推法求出更精确的结果。做法如下：

由（67）式可知

$$I_{\frac{h}{2}}=I+C_1\left(\frac{h}{2}\right)^2+O\left(\frac{h^4}{16}\right)$$
$$=I+\frac{C_1}{4}h^2+O(h^4)①$$

所以

$$4I_{\frac{h}{2}}=4I+C_1h^2+4\cdot O(h^4)$$
$$=4I+C_1h^2+O(h^4)$$

$\frac{1}{3}(4I_{\frac{h}{2}}-I_h)=I+O(h^4)$（将（67）式代入此式左端）

这就是说，如果用 $I^*=\frac{1}{3}(4I_{\frac{h}{2}}-I_h)$ 作为 $I=\int_0^1 f(x)dx$

① 关于Euler-Maclaurin公式及其证明，可参看李岳生及黄友谦所著《数值逼近》p.157～160

的近似值，那么，它的误差是不低于h^4阶的。原来用梯形公式求出的近似值I_h和$I_{\frac{h}{2}}$只有不低于h^2阶的误差（见(67)式）。

我们已经找出了比梯形公式更好的求定积分近似值的公式。现在把求I^*的算法直接写出来。因为

$$I_h=I_N=\frac{1}{N}\left[\frac{1}{2}f(0)+f\left(\frac{1}{N}\right)+f\left(\frac{2}{N}\right)+f\left(\frac{3}{N}\right)+f\left(\frac{4}{N}\right)+\cdots+f\left(\frac{N-1}{N}\right)+\frac{1}{2}f(N)\right]$$

$$=\frac{1}{2N}\left[f(0)+2f\left(\frac{1}{N}\right)+2f\left(\frac{2}{N}\right)+2f\left(\frac{3}{N}\right)+2f\left(\frac{4}{N}\right)+\cdots+2f\left(\frac{N-1}{N}\right)+f(1)\right]$$

所以

$$I_{\frac{h}{2}}=I_{2N}=\frac{1}{2N}\left[\frac{1}{2}f(0)+f\left(\frac{1}{2N}\right)+f\left(\frac{2}{2N}\right)+f\left(\frac{3}{2N}\right)+f\left(\frac{4}{2N}\right)+\cdots+f\left(\frac{2N-1}{2N}\right)+\frac{1}{2}f(1)\right]$$

$$=\frac{1}{2N}\left[\frac{1}{2}f(0)+f\left(\frac{1}{2N}\right)+f\left(\frac{1}{N}\right)+f\left(\frac{3}{2N}\right)+f\left(\frac{2}{N}\right)+\cdots+f\left(\frac{2N-1}{2N}\right)+\frac{1}{2}f(1)\right]$$

$$4I_{\frac{h}{2}}=\frac{1}{2N}\left[2f(0)+4f\left(\frac{1}{2N}\right)+4f\left(\frac{1}{N}\right)+4f\left(\frac{3}{2N}\right)+4f\left(\frac{2}{N}\right)+\cdots+4f\left(\frac{2N-1}{2N}\right)+2f(1)\right]$$

于是

$$I^*=\frac{1}{3}(4I_{\frac{h}{2}}-I_h)$$

$$=\frac{1}{6N}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2N}\right)+2f\left(\frac{2}{2N}\right)\right.$$

① 显然$O\left(\frac{h^4}{16}\right)=O(h^4)$

$$+4f\left(\frac{3}{2N}\right)+2f\left(\frac{4}{2N}\right)+\cdots+4f\left(\frac{2N-1}{2N}\right)+f(1)\Big]$$

(68)

这就是熟知的辛卜生（Simpson）公式！现在我们知道了用辛卜生公式求定积分的近似值时，误差不低于h^4阶，即$\frac{1}{N^4}$阶。可见辛卜生公式比梯形公式精确得多！

我们从梯形公式出发，外推一次就得到精确度高得多的辛卜生公式。不过外推方法也是多种多样的。例如，由（66）式可知

$$I_h=I+C_1h^2+C_2h^4+O(h^6)$$

$$I_{\frac{h}{2}}=I+\frac{1}{4}C_1h^2+\frac{1}{16}C_2h^4+O(h^6)$$

$$I_{\frac{h}{4}}=I+\frac{1}{16}C_1h^2+\frac{1}{256}C_2h^4+O(h^6)$$

于是

$$aI_h+bI_{\frac{h}{2}}+CI_{\frac{h}{4}}$$

$$=(a+b+c)I+\left(a+\frac{b}{4}+\frac{c}{16}\right)C_1h^2$$

$$+\left(a+\frac{b}{16}+\frac{c}{256}\right)C_2h^4+O(h^6)$$

令

$$\begin{cases} a+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{16}=0 \\ a+\dfrac{b}{16}+\dfrac{c}{256}=0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{64}c \\ b=-\dfrac{5}{16}c \end{cases}$$

于是

$$\frac{c}{64}I_h-\frac{5c}{16}I_{\frac{h}{2}}+CI_{\frac{h}{4}}=\frac{45}{64}C\cdot I+O(h^6)$$

所以

$$\frac{1}{45}I_h-\frac{4}{9}I_{\frac{h}{2}}+\frac{64}{45}I_{\frac{h}{4}}=I+O(h^6)\left(取C=\frac{64}{45}\right)$$

可见，若用

$$I^{**}=\frac{1}{45}I_h-\frac{4}{9}I_{\frac{h}{2}}+\frac{64}{45}I_{\frac{h}{4}}=\frac{1}{45}(I_h-20I_{\frac{h}{2}}+64I_{\frac{h}{4}})\tag{69}$$

来求定积分 I 的近似值，则

$$I^{**}=I+O(h^6)$$

误差将不低于 h^6 阶。如果把

$$I_h=I_N=\frac{1}{N}\left(\frac{f_0}{2}+f_1+f_2+\cdots+f_{N-1}+\frac{1}{2}f_N\right)$$

代入（69）式，可得出比辛卜生公式更精确的波尔（Boole）公式。但是这公式太繁琐，用起来不方便，在这里就不写出来了。

从以上叙述中可以看出，将近似算法进行“外推处理”，往往得出更精确的公式，这也算是一种“精加工”吧！在数值计算的许多方面，用外推法常常使我们找到更好的算法。外推法是产生新公式的一个涌泉。

§2 外推法在常微分方程数值解中的应用

在本节中，我们将说明怎样把用差分法得到的常微分方程数值解进行“外推处理”，从而大大提高精确度。

1. 初值问题的外推

对于如下常微分方程初值问题

$$\begin{cases}y'(x)=f(x,y(x))\\y(0)=y_0\end{cases}\tag{A}$$

有如下结论：如果方程右端函数$f(x,y)$在区域

$$D_{:}\quad a\leqslant x\leqslant b,\quad -\infty<y<+\infty$$

中连续，且偏导数$\frac{\partial f}{\partial y}$有界，即有$M>0$，使

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|<M$$

在区域D上成立，则问题（A）在$x\in[a,b]$上有唯一的连续可微解①。

现在，设$f(x,y)$在区域

$$D_{:}\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad -\infty<y<+\infty$$

中连续且偏导数$\frac{\partial f}{\partial y}$有界。求（$A$）在$x\in[0,1]$的数值解。

（1）首先列出与（A）相应的差分方程。将$[0,1]$分成n个相等长的小区间，它们的长$h=\frac{1}{n}$。分点为

$$x_0=0,\quad x_1=h,\quad x_2=2h,\quad \cdots,\quad x_n=nh=1$$

因为

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h}\doteq y'(x)$$

所以方程

$$y'(x)=f(x,y(x))\qquad (y(0)=y_0)$$

可用方程

$$(A')\begin{cases}\dfrac{y(x+h)-y(x)}{h}=f(x,y(x)) \\ \qquad\qquad (\text{当}x=0,h,2h,\cdots,(n-1)h\text{时}) \\ y(0)=y_0\end{cases}$$

近似地代替。

为了方便，将点$x=0,h,2h,\cdots,(n-1)h$的集合记为

$$\Omega_h=\{x\,|\,x=0,h,2h,\cdots,(n-1)h\}$$

但（A'）的解应当与原方程的解有区别，将它记为$y_h(x)$比较合

---

① 参看J.Stoer及R.Bulirsch所著《Introduction to Numerical Analysis》第7章第1节

适。于是得到差分方程

$$\begin{cases} y_h(x+h)=y_h(x)+hf(x,y_h(x)) \quad x\in\Omega_h \\ y_h(0)=y_0 \end{cases} \tag{A_1}$$

（2）解差分方程（A_1），求出$y_h(x)$（$x\in\Omega_h$），把它作为问题（A）的近似解。

方程（A_1）很容易解出。记

$$y_h(Kh)=Y_K \quad (K=0,1,2\cdots,n)$$

即

$$Y_h(0)=Y_0, Y_h(h)=Y_1,\cdots,Y_h(nh)=Y_n$$

由（A_1）可知

$$\begin{cases} Y_0=y_0 \\ Y_1=Y_0+hf(0,Y_0) \\ Y_2=Y_1+hf(h,Y_1) \\ Y_3=Y_2+hf(2h,Y_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_{K+1}=Y_K+hf(Kh,Y_K) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_n=Y_{n-1}+hf((n-1)h,Y_{n-1}) \end{cases}$$

这是一种递推算法，一下子就把$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$全解出来了。由此看出方程（A_1）的解存在且唯一。

在理论上，可以证明：

若$f(x, y)$在区域$D(a\leqslant x\leqslant b, -\infty<y<+\infty)$中，有$N+2$阶连续有界偏导数，则方程

$$\begin{cases} y_h(x+h)=y_h(x)+hf(x,y_h(x)) \\ \qquad\qquad x\in\Omega_h=\{x\,|x=a+ih,i=0,1,\cdots,(n-1)\} \\ y_h(a)=y_0 \qquad\qquad \left(h=\dfrac{b-a}{n}\right) \end{cases}$$

的解$y_h(x)$有如下的渐近展开式

$$\begin{aligned} y_h(x)=y(x)+hW_1(x)+h^2W_2(x)+\cdots \\ +h^NW_N(x)+h^{N+1}E_{N+1}(x;h) \end{aligned} \tag{70}$$

在此式中，$y(x)$是方程

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in (a, b) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

的精确解。$W_1(x), W_2(x), \cdots, W_N(x)$是与$h$无关的函数。它们均在〔$a$，$b$〕上有定义且连续。又

$$W_K(a) = 0 \quad K = 1, 2, \cdots, N$$

又余项$E_{N+1}(x; h)$满足

$$|E_{N+1}(x; h)| \leqslant M(x) \left(此式对任何\ h = h_n = \frac{x - x_0}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots 成立\right)^{①}$$

（70）式给外推法提供了理论基础。

（3）现在可以进行外推了。由（70）式可知，若$f(x, y)$在区域D

$$D:\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -\infty < y < +\infty$$

中有4阶连续有界偏导数（取$N = 2$），则差分方程（A_1）的解$y_h(x)$有渐近展开式

$$\begin{aligned} y_h(x) &= y(x) + hW_1(x) + h^2 W_2(x) + h^3 E_3(x; h) \\ &= y(x) + hW_1(x) + O(h^2)^{②} \end{aligned} \tag{71}$$

于是

$$y_{\frac{h}{2}}(x) = y(x) + \frac{h}{2} W_1(x) + O(h^2)$$

所以

$$2y_{\frac{h}{2}}(x) - y_h(x) = y(x) + O(h^2)$$

取

$$y^*(x) = 2y_{\frac{h}{2}}(x) - y_h(x) \tag{72}$$

---

① 参看J. Stoer及R. Bulirsch所著《Introduction to Numerical Analysis》第7章第2节

② ∵ $W_2(x)$在$[a, b]$连续 ∴ 有界。又$E_3(x; h)$在$[a, b]$有界于是

$$\left|\frac{h^2 W_2(x) + h^3 E_3}{h^2}\right| \leqslant |W_2(x)| + h|E_3| < H（常数）$$

∴ $h^2 W_2(x) + h^3 E_3(x; h) = O(h^2)$

则

$$y^*(x)=y(x)+O(h^2)$$

由（71）式看出

$$y_h(x)=y(x)+O(h)$$

所以，由外推得到的近似解y^*x比（A_1）的解要精确多了！

举一个例子。对于初值问题

$$(A)\quad \begin{cases} y'(x)=y(x) \\ y(0)=1 \end{cases} \quad (\text{即} f(x,y)\equiv y) \quad x\in(0,1)$$

求它的数值解。

第一步：列出差分方程

$$(A_1)\ \begin{cases} y_h(x+h)=y_h(x)+hy_h(x) & (x=0,h,2h,\cdots,(n-1)h) \\ y_h(0)=1 & \left(h=\frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

再解此方程(A_1)。令

$$Y_K=y_h(Kh),K=0,1,\cdots,n$$

将(A_1)表为

$$\begin{cases} Y_{K+1}=(1+h)Y_K & (K=0,1,2,\cdots,(n-1)) \\ Y_0=1 \end{cases}$$

于是

$$Y_0=1$$

$$Y_1=(1+h)Y_0=(1+h)$$

$$Y_2=(1+h)Y_1=(1+h)^2$$

设

$$Y_P=(1+h)^P$$

则

$$Y_{P+1}=(1+h)Y_P=(1+h)^{P+1}$$

所以

$$Y_K=(1+h)^K \qquad (K=0,1,\cdots,n) \tag{73}$$

这就解出了方程(A_1)。

现在进行数值计算。取

$$n=8, \quad h=\frac{1}{8}$$

由公式(73)，得差分方程(A_1)的解$Y_K=(1+\frac{1}{8})^K$

$$\begin{cases} Y_0=1 \\ Y_1=1.125 \\ Y_2=1.265625 \\ Y_3=1.4238281 \\ Y_4=1.6018066 \\ Y_5=1.8020325 \\ Y_6=2.0272865 \\ Y_7=2.2806973 \\ Y_8=2.5657845 \end{cases}$$

我们已知(A)的精确解是

$$y(x)=e^x$$

分别取 $x=0$，$\frac{1}{8}$，$\frac{2}{8}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{4}{8}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{6}{8}$，$\frac{7}{8}$，1。求出$y(x)=e^x$在这些点处的值如下

$$\begin{cases} y_0=1 \\ y_1=1.1331485 \\ y_2=1.2840254 \\ y_3=1.4549914 \\ y_4=1.6487213 \\ y_5=1.868246 \\ y_6=2.1169 \\ y_7=2.3988753 \\ y_8=2.7182818 \end{cases}$$

对照这些数值，可见差分解y_K与精确解y_K之差①。

为了外推，再求出 $y_{\frac{h}{2}}(x)$。由（73）式可知

① 在计算y_K时，还有由四舍五入造成的误差。在本书中，就不讨论这种“舍入误差”了。

$$y_{\frac{h}{2}}\left(K\frac{h}{2}\right)=\left(1+\frac{h}{2}\right)^{K}=\left(1+\frac{1}{16}\right)^{K} \tag{74}$$

只要求出 $y_{\frac{h}{2}}(ph)$ ($p=0,1,2,\cdots,8$) 各值就可以外推了。令

$$y_{\frac{h}{2}}\left(2K\cdot\frac{h}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{16}\right)^{2K}=Y_{K,\frac{h}{2}}$$

于是

$$Y_{0,\frac{h}{2}}=\left(1+\frac{1}{16}\right)^{0},\quad Y_{1,\frac{h}{2}}=\left(1+\frac{1}{16}\right)^{2},$$

$$Y_{2,\frac{h}{2}}=\left(1+\frac{1}{16}\right)^{4},\cdots,$$

由此得

$$\begin{cases} Y_{0,\frac{h}{2}}=1 \\ Y_{1,\frac{h}{2}}=1.1289062 \\ Y_{2,\frac{h}{2}}=1.2744293 \\ Y_{3,\frac{h}{2}}=1.4387111 \\ Y_{4,\frac{h}{2}}=1.624170 \\ Y_{5,\frac{h}{2}}=1.8335356 \\ Y_{6,\frac{h}{2}}=2.0698898 \\ Y_{7,\frac{h}{2}}=2.3367114 \\ Y_{8,\frac{h}{2}}=2.637928 \end{cases}$$

第二步：将上面求得的两组差分解进行外推处理。我们用公式（72）进行外推。把（72）式写成

$$Y_K^*=2Y_{K,\frac{h}{2}}-Y_{K,h}$$

在这里

$$Y_{K,h}=y_h(Kh),\quad Y_{K,\frac{h}{2}}=Y_{\frac{h}{2}}(Kh)$$

由此得

$$\begin{cases} Y_0^* = 2\times 1 - 1 = 1 \\ Y_1^* = 2\times 1.1289062 - 1.125 = 1.1328124 \\ Y_2^* = 2\times 1.2744293 - 1.265625 = 1.2832336 \\ Y_3^* = 2\times 1.4387111 - 1.4238281 = 1.4535941 \\ Y_4^* = 2\times 1.624170 - 1.6018066 = 1.6465334 \\ Y_5^* = 2\times 1.8335356 - 1.8020325 = 1.8650387 \\ Y_6^* = 2\times 2.0698898 - 2.0272865 = 2.1124931 \\ Y_7^* = 2\times 2.3367114 - 2.2806973 = 2.3927255 \\ Y_8^* = 2\times 2.637928 - 2.5657845 = 2.7100715 \end{cases}$$

现在将上面求出的差分解$Y_{K,h}$及$Y_{K,\frac{h}{2}}$，外推解Y_K^*和精确解$y(x)=e^x$的值列成对照表，以便读者观察（取小数4位）

表 8

x_K	$Y_{K,h}$	$Y_{K,h/2}$	Y_K^*	$y(x_K)=e^{x_K}$
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1/8	1.1250	1.1289	1.1328	1.1331
1/4	1.2656	1.2744	1.2832	1.2840
3/8	1.4238	1.4387	1.4536	1.4550
1/2	1.6018	1.6242	1.6465	1.6487
5/8	1.8020	1.8335	1.8650	1.8682
3/4	2.0273	2.0699	2.1125	2.1169
7/8	2.2807	2.3367	2.3927	2.3989
1	2.5658	2.6379	2.7101	2.7183

在此表上，我们又一次看到外推法的巨大优越性。我们把误差较大的差分解$Y_{K,h}$和$Y_{K,\frac{h}{2}}$用外推公式（74）处理一下，只花费了很少的劳动，却得到了精确得多的结果！

2. 边值问题的外推

对于如下的常微分方程边值问题

$$(B)\quad \begin{cases} -y''(x) + ay(x) = f(x) & x\in(0,1) \\ y(0)=y_0,\ \ y(1)=y_1 & a\text{为常数}\ \ (\text{设}a\geqslant 0)① \end{cases}$$

① 当$a\geqslant 0$，$f(x)$连续，可以证明(B)的解存在，唯一。

（这是线性常微分方程的两点边值问题）①

我们打算用外推法求它的数值解。仍取三个步骤

（1）列出与（B）相应的差分方程。

将区间〔0，1〕n等分，令$h=\frac{1}{n}$，分点为

$$x_0=0,x_1=h,x_2=2h,\cdots,x_n=nh=1$$

用二阶差商

$$[y(x_{j+1})-2y(x_j)+y(x_{j-1})]/h^2$$

来近似地代替二阶导数$y''(x_j)$，得到差分方程

$$(B_1)\quad\begin{cases}-[y_h(x_{j+1})-2y_h(x_j)+y_h(x_{j-1})]/h^2\\=-ay_h(x_j)+f(x_j)\\y_h(0)=y_0,\quad y_h(1)=y_1\quad(j=1,2,\cdots,n-1)\end{cases}$$

（2）解差分方程（B_1），求出它的解$y_h(x_j)$，把它作为问题（B）的近似解。

方程组（B_1）是线性的，它的解存在且唯一，这一点只要观察它的系数矩阵就可以肯定，不详细说了。

在理论上可以证明：若（B）方程右端函数$f(x)$在〔0，1〕上有4阶连续导数$f^{(4)}_{(x)}$，则（B_1）的解$y_h(x)$有如下的渐近展开式

$$y_h(x)=y(x)+h^2W(x)+h^4E(x;h)\qquad(75)$$

在此式中，$W(x)$是与h无关的函数，它有4阶连续导数。函数$E_h(x)$有界。我们在本节的最后来证明（75）式。初学者和只关心外推法的应用的人，可以不看这个证明。

（3）外推。有了（75）这个渐近展开式，就可以外推了。和过去的做法一样，因为

$$y_{\frac{h}{2}}(x)=y(x)+\left(\frac{h}{2}\right)^2W(x)+\left(\frac{h}{2}\right)^4E\left(x;\frac{h}{2}\right)$$

---

① 方程中$y''(x)$的系数取为-1，是现代数学工作者为讨论一些理论问题（如“广义解”问题）的方便而设的。如果您不习惯这一点，可将此方程的每一项均乘以-1。

$$=y(x)+\frac{h^2}{4}W(x)+O(h^4)$$

又（75）式可写成

$$y_h(x)=y(x)+h^2W(x)+O(h^4)$$

若取

$$y^*(x)=\frac{1}{3}\left[4y_{\frac{h}{2}}(x)-y_h(x)\right] \tag{76}$$

则

$$y^*(x)=y(x)+O(h^4)$$

还是举一个例子。对于边值问题

$$(B)\quad \begin{cases}-y''(x)+y(x)=0 & x\in(0,1)\\ y(0)=0,\quad y(1)=1\end{cases}$$

用外推法求数值解。

第一步：写出与（B）相应的差分方程。

将〔0，1〕区间 n 等分，令 $h=\frac{1}{n}$，分点是

$$x_0=0,x_1=h,x_2=2h,\cdots,x_n=nh=1$$

差分方程取为

$$(B_1)\quad \begin{cases}-[y_h(x_{j+1})-2y_h(x_j)+y_h(x_{j-1})]/h^2+y_h(x_j)=0\\ y_h(0)=0,\quad y_h(1)=1 \qquad (j=1,2,\cdots,n-1)\end{cases}$$

也就是

$$(B_2)\quad \begin{cases}y_h(x_{j-1})-(2+h^2)y_h(x_j)+y_h(x_{j+1})=0\\ y_h(0)=0,\quad y_h(1)=1 \qquad (j=1,2,\cdots,n-1)\end{cases}$$

第二步：解方程组（B_2）

取 $n=2$，则 $h=\frac{1}{2}$。这时只有三个分点，即

$$x_0=0,\quad x_1=h=\frac{1}{2},\quad x_2=2h=1$$

已知

$$y_h(x_0)=0,\quad y_h(x_2)=y_h(1)=1$$

只有　$y_h(x_1)=y_h\left(\frac{1}{2}\right)$的值未知。

在（B_2）中，取 $j=1$，$h=\frac{1}{2}$，得

$$y_h(x_0)-\left(2+\frac{1}{4}\right)y_h(x_1)+y_h(x_2)=0$$

所以

$$-\frac{9}{4}y_h(x_1)+1=0$$

$$y_h(x_1)=\frac{4}{9}$$

于是

$$\begin{cases} y_h(0)=0 \\ y_h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{9} \\ y_h(1)=1 \end{cases}$$

为了准备外推，再求 $y_{\frac{h}{2}}(x_j)$。这次，取

$$n=4,\quad h'=\frac{1}{4}$$

将区间〔0，1〕4等分，分点有5个，即

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{4},\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=\frac{3}{4},\ x_4=1$$

记

$$h'=\frac{h}{2}=\frac{1}{4},\quad y_{h'}(x_j)=y_j$$

则方程组（B_2）化为

$$\begin{cases} y_{j-1}-(2+h'^2)y_j+y_{j+1}=0 \\ y_0=0,\ y_4=1 \end{cases}$$

详细地写出，就是

$$\begin{cases}\frac{33}{16}y_1 - y_2 = 0\\ -y_1+\frac{33}{16}y_2 - y_3 = 0\\ -y_2+\frac{33}{16}y_3 = 1\end{cases}$$

于是

$$\begin{cases}y_1 = 0.21511777 = y_{\frac{h}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)\\ y_2 = 0.443680402 = y_{\frac{h}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\\ y_3 = 0.6999662 = y_{\frac{h}{2}}\left(\frac{3}{4}\right)\end{cases}$$

第三步：外推。用（76）式，在 $x=\frac{1}{2}$ 处外推，得

$$y^*\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left[4y_{\frac{h}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)-y_h\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[4\times 0.443680402-\frac{4}{9}\right]=0.4434257$$

与精确解对比一下。问题（B）的精确解是

$$y(x)=\frac{e}{e^2-1}(e^x-e^{-x})$$

在 $x=\frac{1}{2}$ 处，$y(x)$ 的值是

$$y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e}{e^2-1}\left(e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}\right)=0.443409442$$

外推的效果是明显的。

由（76）式可知，用这种方法只能在点 $x=\frac{1}{2}$ 处作外推（在其余点处因数据不足，不好外推）。这就使数值解在点 $x=\frac{1}{4}$ 及 $x=\frac{3}{4}$ 处误差较大，造成数值解在各点处误差不同阶。最近，我国

学者陈传淼和林群建立了一个很有用的新公式①，用这个公式可以在其余各点处同时进行外推。现在就来介绍这个公式并且用它在分点 $x=\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$处进行外推。

用分点

$$x_0=0, x_1=h, \cdots, x_n=nh=1$$

把区间〔0，1〕n 等分。再用分点

$$x_0=0, \quad x_1=\frac{h}{2}, \quad x_2=2\cdot\frac{h}{2}, \quad x_3=3\cdot\frac{h}{2}, \cdots,$$

$$x_{2n}=2n\cdot\frac{h}{2}=1$$

把〔0，1〕$2n$等分。把 n 等分的分点的集合记为

$$\Omega_h=\{x_j \mid x_j=j\cdot h, j=0,1,\cdots,n\}$$

把$2n$等分的分点的集合记为

$$\Omega_{\frac{h}{2}}=\left\{x_j \mid x_j=j\cdot\frac{h}{2}, \quad j=0, 1, \cdots, 2n\right\}$$

如果

$x_j\in\Omega_h$，$x_{j+1}\in\Omega_h$

但是 x_j和x_{j+1}的中点

$\overline{x_j}=(x_j+x_{j+1})/2\in\Omega_{\frac{h}{2}}\diagdown\Omega_h$②

这时，我们从差分方程(B_1)中可解出

$$y_h(x_j), \quad y_h(x_{j+1})$$

和

$$y_{\frac{h}{2}}(x_j), \quad y_{\frac{h}{2}}(\overline{x_j}), \quad y_{\frac{h}{2}}(x_{j+1})$$

这几个值。于是，用（76）式外推，得

$$y^*(x_j)=\frac{1}{3}\left[4y_{\frac{h}{2}}(x_j)-y_h(x_j)\right]$$

---

① 用此公式还可以对有限元解作外推。此公式已经引起计算数学界的重视。

② $\Omega_{h/2}\diagdown\Omega_h$表示集合$\Omega_{h/2}$与集合$\Omega_h$的差集。指点$\overline{x_j}$属于 $\Omega_{h/2}$ 但不属于 Ω_h。

$\diagdown$表示对两集合施行的减法运算。

$$y^*(x_{i+1})=\frac{1}{3}\left[4y_{\frac{h}{2}}(x_{i+1})-y_h(x_{i+1})\right]$$

但是 $y_h(\overline{x_i})$的值不知道，所以不能用(76)式在$(\overline{x_i}$处外推。陈传淼—林群公式是

$$y^*(\overline{x_i})=y_{\frac{h}{2}}(\overline{x_i})+\frac{1}{6}\Big[y_{\frac{h}{2}}(x_i)-y_h(x_i)+y_{\frac{h}{2}}(x_{i+1})$$
$$-y_h(x_{i+1})\Big] \tag{77}$$

现在用（77）式在分点 $x=\frac{1}{4}$及 $x=\frac{3}{4}$处进行外推。得

$$y^*\left(\frac{1}{4}\right)=y_{\frac{h}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{6}\Big[y_{\frac{h}{2}}(0)-y_h(0)$$
$$+y_{\frac{h}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)-y_h\left(\frac{1}{2}\right)\Big]$$
$$=0.21511777+\frac{1}{6}\left[0.443680402-\frac{4}{9}\right]$$
$$=0.2149903$$

$$y^*\left(\frac{3}{4}\right)=y_{\frac{h}{2}}\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{6}\Big[y_{\frac{h}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)-y_h\left(\frac{1}{2}\right)+y_{\frac{h}{2}}(1)$$
$$-y_h(1)\Big]=0.6999662+\frac{1}{6}\left[0.443680402-\frac{4}{9}\right]$$
$$=0.6998388$$

在此二点处，精确解 $y(x)=\frac{e}{e^2-1}(e^x-e^{-x})$的值是

$$y\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{e}{e^2-1}\left(e^{\frac{1}{4}}-e^{-\frac{1}{4}}\right)=0.2149523$$

$$y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{e}{e^2-1}\left(e^{\frac{3}{4}}-e^{-\frac{3}{4}}\right)=0.6997241$$

将以上数值列表以便对比

表 4

x_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$y_h(x_k)$		$\frac{4}{9}$	
$y_{\frac{h}{2}}(x_k)$	0.21511777	0.443680402	0.6999662
$y^*(x_k)$	0.2149903	0.4434257	0.6998388
$y(x_k)$	0.2149523	0.443409442	0.6997241

从这个例子可以看清楚如何在常微分方程中使用外推法。

现在对（75）式给出证明。

对于问题

$$(B)\qquad \begin{cases} -y''(x)+ay(x)=f(x) & x\in(0,1) \\ y(0)=y_0,\ \ y(1)=y_1 & a \text{ 为常数。} \end{cases}$$

现在设 $a\geqslant 0$.

这是线性常微分方程边值问题。在微分方程理论中已经证明，若$f(x)$在$[0,1]$连续，则(B)在$[0,1]$中有唯一解$y(x)$。这时因为

$$y''(x)=ay(x)-f(x)$$

而$y(x)$及$f(x)$均连续，所以$y''(x)$连续。由此可见，若$f(x)$有4阶连续导数，则

$$y^{(4)}(x)=ay''(x)-f''(x)$$

所以 $y^{(4)}(x)$连续。又

$$y^{(6)}(x)=ay^{(4)}(x)-f^{(4)}(x)$$

可见$y^{(6)}(x)$也连续。这就是说，若(B)中方程右端的函数$f(x)$有4阶连续导数（当$x\in[a,b]$），则问题(B)有唯一解$y(x)$，它在$[a,b]$有6阶连续导数。

现在，设$f(x)$确实具有4阶连续导数（当$x\in[a,b]$），我们来证明（75）式，即

$$y_h(x)=y(x)+h^2W(x)+h^4E(x;h)$$
$$=y(x)+h^2W(x)+h^4E_h(x)$$

（为便于书写，将$E(x;h)$改记为$E_h(x)$）

在此式中，$y_h(x)$是(B_1)的解（即差分解），$y(x)$是(B)的解（即精确解），$E_h(x)$有界。

用“待定函数法”．先设(75)式成立，且设$W(x)$在$[a,b]$上有4阶连续导数。将(75)式代入(B_1)，即代入方程

$$-[y_h(x_{j+1})-2y_h(x_j)+y_h(x_{j-1})]/h^2$$
$$+ay_h(x_j)=f(x_j)$$

记

$$Py(x_j)=[y(x_{j+1})-2y(x_j)+y(x_{j-1})]/h^2$$

于是

$$-Py(x_j)-h^2PW(x_j)-h^4PE_h(x_j)+ay_h(x_j)=f(x_j) \tag{78}$$

但$y(x)$有6阶连续导数，所以

$$y(x_{j+1})=y(x_j)+hy'(x_j)+\frac{h^2}{2!}y''(x_j)+\frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x_j)$$
$$+\frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_j)+\frac{h^5}{5!}y^{(5)}(x_j)+0(h^6)$$

$$y(x_{j-1})=y(x_j)-hy'(x_j)+\frac{h^2}{2!}y''(x_j)-\frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x_j)$$
$$+\frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_j)-\frac{h^5}{5!}y^{(5)}(x_j)+0(h^6)$$

于是

$$Py(x_j)=[y(x_{j+1})-2y(x_j)+y(x_{j-1})]/h^2$$
$$=\frac{1}{h^2}\left[h^2y''(x_j)+\frac{1}{12}h^4y^{(4)}(x_j)+0(h^6)\right]$$
$$=y''(x_j)+\frac{1}{12}h^2y^{(4)}(x_j)+0(h^4)$$

又$W(x)$有4阶连续导数，所以

$$W(x_{j+1})=W(x_j)+hW'(x_j)+\frac{1}{2!}h^2W''(x_j)$$

$$+\frac{1}{3!}h^3W^{(3)}(x_i)+0(h^4)$$

$$W(x_{i-1})=W(x_i)-hW'(x_i)+\frac{1}{2!}h^2W''(x_i)$$

$$-\frac{1}{3!}h^3W^{(3)}(x_i)+0(n^4)$$

于是

$$PW(x_i)=[W(x_{i+1})-2W(x_i)+W(x_{i-1})]/h^2$$

$$=\frac{1}{h^2}[h^2W''(x_i)+0(h^4)$$

$$=W''(x_i)+0(h^2)$$

所以（78）化为

$$-y''(x_i)-\frac{h^2}{12}y^{(4)}(x_i)+0(h^4)-h^2(W''(x_i)+0(h^2))$$

$$-h^4PE_h(x_i)+ay(x_i)+ah^2W(x_i)+ah^4$$

$$\cdot E_h(x_i)=f(x_i)$$

即

$$-y''(x_i)-f(x_i)+ay(x_i)+h^2\Big[-\frac{1}{12}y^{(4)}(x_i)$$

$$-W''(x_i)+aW(x_i)\Big]+h^4[0(1)-PE_h(x_i)$$

$$+aE_h(x_i)]=0 \text{①} \qquad (78)'$$

由此可见，若$W(x)$满足

$$(C)\quad \begin{cases} -W''(x)+aW(x)=\frac{1}{12}y^{(4)}(x) \\ W(0)=0 \end{cases}$$

且$W(x)$有 4 阶连续导数，又

$$(D)\quad -PE_h(x_j)+aE_h(x_j)=0(1)\quad (j=1,2,\cdots,n-1)$$

$$E_h(0)=0=E_h(1)\text{②}$$

---

① $0(1)$表示有界量

② $\because y_h(x)=y(x)+h^2W(x)+h^4E_h(x)$，且$y_h(0)=y(0)$，$y_h(1)=y(1)$
$\therefore h^2W(0)+h^4E_h(0)=0$　对任何$h=\frac{1}{n}$成立（$n=2,3,\cdots$,）$\therefore W(0)=0$
$\therefore E_h(0)=0$ 同理，$W(1)=0$，$E_h(1)=0$

则(78)′式成立。在这里，注意

$$-y''(x)+ay(x)=f(x)$$

所以

$$-y''(x_j)+ay(x_j)=f(x_j)$$

自然成立。

观察方程（C），这是常系数线性常微分方程。方程右端的已知函数$\frac{1}{12}y^{(4)}(x)$有 2 阶连续导数。所以它的解$W(x)$存在，且由方程（C）可知$W(x)$有 4 阶连续导续。

再观察方程（D），看它是否有有界解$E_h(x_j)$。把(D)详细写出来就是

$$-[E_h(x_{j+1})-2E_h(x_j)+E_h(x_{j-1})]/h^2+aE_h(x_j)=0(1)$$

即

$$E_h(x_{j+1})+2E_h(x_j)-E_h(x_{j-1})+ah^2E_h(x_j)=0(1)h^2$$
$$=0(h^2)$$

令

$$E_h(x_j)=E_j$$

则

$$-E_{j+1}+2E_j-E_{j-1}+ah^2E_j=0(h^2) \qquad (D')$$

现在考察如下方程

$$\begin{cases}-E_{j+1}+2E_j-E_{j-1}+ah^2E_j=\varphi(x_j)=\varphi_j \\ E_0=0=E_n \qquad (j=1,2,\cdots,n-1)\end{cases} \qquad (E)$$

因为

$$(E_{j+1}-2E_j+E_{j-1})E_j+ah^2E_j^2=\varphi_jE_j$$

又

$$\sum_{j=1}^{n-1}(E_{j+1}-2E_j+E_{j-1})E_j=\sum_{j=1}^{n-1}(E_{j-1}-E_j-E_j+E_{j+1})E_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}(E_{j-1}-E_j)E_j-\sum_{j=1}^{n-1}(E_j-E_{j+1})E_j$$

$$=\sum_{j=0}^{n-2}(E_j-E_{j+1})E_{j+1}-\sum_{j=1}^{n-1}(E_j-E_{j+1})E_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n-2}(E_j-E_{j+1})(E_{j+1}-E_j)+(E_0-E_1)E_1$$

$$-(E_{n-1}-E_n)E_{n-1}$$

$$=-\sum_{j=1}^{n-2}(E_j-E_{j+1})^2+(E_0-E_1)(E_1-E_0)$$

$$-(E_{n-1}-E_n)(E_{n-1}-E_n)$$

$$=-\sum_{j=0}^{n-1}(E_j-E_{j+1})^2 \qquad (\text{注意}E_0=0=E_n)$$

所以

$$\sum_{j=0}^{n-1}(E_j-E_{j+1})^2+\sum_{j=1}^{n-1}ah^2E_j^2=\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_jE_j$$

于是

$$\sum_{j=0}^{n-1}(E_j-E_{j+1})^2+\sum_{j=0}^{n-1}ah^2E_j^2=\sum_{j=0}^{n-1}\varphi_jE_j$$

又

$$|E_j|=\left|\sum_{i=0}^{j-1}(E_{i+1}-E_i)\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|E_{i+1}-E_i|\leqslant\sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}(E_{i+1}-E_i)^2} \text{①}$$

① 这里用到著名的Cauchy不等式$\sum a_ib_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$

所以

$$|E_j|^2 \leqslant n\sum_{i=0}^{n-1}(E_{i+1}-E_i)^2 = n\left(-ah^2\sum_{i=0}^{n-1}E_i^2-\sum_{j=0}^{n-1}\varphi_j E_j\right)$$

于是

$$|E_j|^2 \leqslant n\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_i E_i \leqslant n\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_i^2\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}E_j^2\right)}$$

$$\leqslant n\sqrt{n}\max_j|\varphi_j|\sqrt{n}\max_i|E_i|$$

（注意 $nh=1$）

可见

$$\max_i|E_i|^2 \leqslant n^2\max_j|\varphi_j|\cdot\max_i|E_i|$$

所以

$$(\max_j|E_j|)^2 \leqslant n^2\max_j|\varphi_j|\cdot\max_j|E_j|$$

由此得

$$\max_{0\leqslant j\leqslant n-1}|E_j| \leqslant \frac{1}{n^2}\max_{0\leqslant j\leqslant n-1}|\varphi_j| \tag{79}$$

（注意 $nh=1$）

（79）式是关于方程组（E）的解的一个先验估计式。至于方程组（E）的解存在且唯一，只要观察（E）的系数矩阵就可以肯定。

在方程（E）中，取$\varphi_j=0(h^2)$，就是方程(D')。由（79）式，可知(D')的唯一解E_j($j=1,2,\cdots,n-1$)满足

$$\max_{0\leqslant j\leqslant n-1}|E_j| \leqslant \frac{0(h^2)}{h^2}$$

所以，有$M>0$（M与h无关），当h充分小（当$h\to 0$且$h>0$）时，满足

$$\max_{0\leqslant j\leqslant n-1}|E_j|<M$$

即$E_j=E_h(x_j)$有界。于是（75）式得证。

§3 外推法在偏微分方程数值解中的应用

在上一节中介绍了常微分方程数值解的外推算法，这方面的工作已经相当成熟，有了许多好结果，在国际上也早就为计算数学家熟知了。但是，如何用外推法来求偏微分方程的数值解呢？在国内的教科书中还没有谈到过这个问题。国际上已有一批成果，目前中、外数学家还在紧张地研究着偏微分方程中的外推法。这个领域中的外推算法，在理论上难度较大，在实际计算方面也比较复杂。在本节中，只对一个具体的偏微分方程进行外推计算，并且结合这个具体问题介绍一点现代结果，使读者初步了解偏微分方程外推算法的一些特点。

对于

$$(A)\quad\begin{cases}-\Delta u(x,y)=f(x,y) & (x,y)\in\Omega\ (\Omega\text{为平面上的开矩形域})\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

在此，$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$（Δ是二维Laplace算符），符号$\partial\Omega$表示区域Ω的边界。$f(x,y)$是在区域Ω中有定义的已知函数。问题(A)就是：求函数$u(x,y)$，要它具有二阶连续偏导数，且在矩形区域Ω内满足方程$-\Delta u=f(x,y)$，在矩形的边界$\partial\Omega$上满足边值条件$u(x,y)|_{\partial\Omega}=0$（当然要求$u(x,y)$在闭矩形$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$上连续）。方程

$$-\Delta u(x,y)=f(x,y)$$

是大家熟知的Poisson方程。问题(A)称为Poisson方程的第一边

值问题。我们用差分法求出（A）的数值解，并进行外推处理。最后说明外推算法的理论根据。

现在，将问题（A）具体化为

$$(A)\quad \begin{cases} -\Delta u = 2\sin x\cos y & \text{当}(x,y)\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega}=0 & \Omega:\ 0<x<\pi \quad \text{（现在}\Omega\text{是正方形）。} \\ & \quad\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

第一步　写出与(A)相应的差分方程，并求出此差分方程的解。

将$[0,\pi]$区间分成n个相等的小区间，分点是

$$x_0=0,\ x_1=h,\ x_2=2h,\cdots,x_n=nh=\pi$$

又将$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$区间也$n$等分，分点是

$$y_0=-\frac{\pi}{2},\ y_1=-\frac{\pi}{2}+h,\ y_2=-\frac{\pi}{2}+2h,\cdots,$$

$$y_n=-\frac{\pi}{2}+nh=\frac{\pi}{2}\quad\left(h=\frac{\pi}{n}\right)$$

现在正方形Ω被分成n^2个小正方形格子，它们的顶点（又称"格点"或"节点"）分别是

(x_j,y_k)　$j,k=0,1,2,\cdots,n$　　(共有$(n+1)^2$个节点)

记

$$u(x_j,y_k)=u_{j,k}$$

因为偏导数有近似式

$$u_x(x_j,y_k)\approx(u_{j+1,k}-u_{j,k})/h,\quad u_x(x_{j-1},y_k)\approx(u_{j,k}-u_{j-1,k})/h$$

又二阶偏导数有近似式

$$u_{xx}(x_j,y_k)\approx[u_x(x_j,y_k)-u_x(x_{j-1},y_k)]/h$$

$$\approx\frac{1}{h}[(u_{j+1,k}-u_{j,k})/h-(u_{j,k}-u_{j-1,k})/h]$$

$$=[u_{j+1,k}-2u_{j,k}+u_{j-1,k}]/h^2$$

同理，有

$$u_{yy}(x_j, y_k) \approx [u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}]/h^2$$

所以

$$\Delta u_{j,k} = u_{xx}(x_j, y_k) + u_{yy}(x_j, y_k)$$
$$\doteq [u_{j+1,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k+1} + u_{j,k-1} - 4u_{j,k}]h^2 \tag{80}$$

在（80）式右端出现的是在节点(x_j, y_k)及其上、下、左、右四节点处的函数值。这个式子，常称“五点差分格式”。记

$$[u_{j+1,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k+1} + u_{j,k-1} - 4u_{j,k}] = \Diamond u_{j,k}$$

把◇称为一差分算子。与（A）问题相应的差分方程可以写成

$$(A_1)\quad \begin{cases} \Diamond u_{j,k} = -2h^2 \sin x_j \cos y_k \ (j, k = 1, 2, \cdots, n-1) \\ u_{j,k} = 0 \ (\text{当} j, k = \text{数中有一数是} 0 \text{或} n) \end{cases}$$

现在来解方程(A_1)。先取$n=2$，则$h=\frac{\pi}{2}$。这时

$$x_0 = 0,\quad x_1 = \frac{\pi}{2},\quad x_2 = \pi$$

$$y_0 = -\frac{\pi}{2},\quad y_1 = 0,\quad y_3 = \frac{\pi}{2}$$

又

$$\Diamond u_{11} = u_{0,1} + u_{2,1} + u_{1,0} + u_{1,2} - 4u_{11}$$

方程（A_1）化为

$$\begin{cases} u_{0,1} + u_{2,1} + u_{1,0} + u_{1,2} - 4u_{11} = (-2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi}{2}\cos 0 \\ u_{0,1} = 0 = u_{2,1} = u_{1,0} = u_{1,2} \end{cases}$$

实际上只有u_{11}是未知量。由此方程解出u_{11}，得

$$u_{11} = \frac{\pi^2}{8} \doteq 1.2337$$

方程（A）的精确解是

$$u(x, y) = \sin x \cos y \ (\text{这可以直接验证})$$

由此得

$$u\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos 0 = 1$$

可见用$u_h\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)=u_{11}=1.2337$作为$u\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)=1$的近似值，误差太大了。怎么办呢？

我们很容易想到一个办法，就是在求出$u_h\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$之后，再求出$u_{\frac{h}{2}}\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$，然后试用公式

$$\frac{1}{3}\left[4u_{\frac{h}{2}}\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)-u_h\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)\right]=u^*\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$$

进行外推。也许这样可以得到更好的近似值。

虽然我们现在还没有把握，但不妨一试。反正问题(A)的精确解已经知道，可以直接看出这样算出的$u^*\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$的误差，比$u_h\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$及$u_{\frac{h}{2}}\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$的误差究竟是大些还是小些？这是一个有趣的试验。数学定理往往是通过大量观察才发现的。现在，我们来求$u_{\frac{h}{2}}\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$。为此，写出步长为$h'=\frac{h}{2}$的差分方程($A_1$)，也就是

$$(A_1')\quad\begin{cases}u_{j+1,K}+u_{j-1,K}+u_{j,K+1}+u_{j,K-1}-4u_{j,K}=(-2)\cdot\\ \cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\sin x_j\cos y_k\qquad(j,k=1,2,3)\\ u_{j,K}=0(\text{当}j,K\text{二数之一为 0 或 4 时})\ (j,K=1,2,3)\end{cases}$$

这相当于将正方形Ω等分为$4^2=16$个小正方形（取$n=4$）。可以按下式迭代求解。

$$\begin{cases}u_{j,k}^{(m)}=\frac{1}{4}\Big[u_{j+1,k}^{(m-1)}+u_{j-1,K}^{(m-1)}+u_{j,K+1}^{(m-1)}+u_{j,K-1}^{(m-1)}\\ \qquad+\frac{\pi^2}{8}\sin\left(\frac{\pi}{4}j\right)\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2}+K\frac{\pi}{4}\right)\Big]\\ \qquad u_{j,k}^{(m)}=0\ (\text{当}j,K\text{之一为 0 或 4 时})\ (j,K=1,2,3)\\ \text{初值}u_{j,K}^{(0)}\text{可任取}(j,K=1,2,3)\end{cases}$$

当$|u_{j,K}^{(m)}-u_{j,K}^{(m-1)}|\leqslant\varepsilon(j,K=1,2,3)$，即停止迭代运算，以

$u_{i,K}^{(m)}$作为$u_{i,K}$的近似值。①

现在，取$\varepsilon=0.0001$，得到(A_1')的解如下：

$u_{1,1}=0.5265$ $u_{1,2}=0.7446$ $u_{1,3}=0.5265$

$u_{2,1}=0.7446$ $u_{2,2}=1.0530$ $u_{2,3}=0.7446$

$u_{3,1}=0.5265$ $u_{3,2}=0.7446$ $u_{3,3}=0.5265$

于是

$$u_{\frac{h}{2}}\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)=u_{2,2}=1.0530$$

现在采取第二个步骤，试用公式

$$\frac{1}{3}\left[4u_{\frac{h}{2}}\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)-u_h\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)\right]=u^*\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$$

在点$\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$处进行外推，得

$$u^*\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)=\frac{1}{3}[4\times1.0530-1.2337]=0.9928$$

与精确值$u\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos0=1$比较，发现$u^*\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$比$u_h\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$及$u_{\frac{h}{2}}\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$的误差都小多了！

这种算法有什么理论根据呢？许多数学家探讨了这个问题。苏联学者证明了如下重要结论：

如果问题（A）中方程右端的函数$f(x,y)$满足

$$f(x,y)\in c^{3+\alpha}(\overline{\Omega})\ \ (0<\alpha<1)$$

且在$\overline{\Omega}$的四个角点处，有

$$f(x,y)=0\text{ 和 }f_{xx}-f_{yy}=0$$

则问题(A)有唯一解$u(x,y)\in c^{5+\alpha}(\overline{\Omega})$，且方程组$(A_1)$的解$u_h(x,y)$有渐近展开式

$$u_h(x,y)=u(x,y)+h^2W(x,y)+E_h(x,y)$$

在此式中

---

① 当未知量个数增多时，这种迭代过程收敛得越来越慢。所以，当未知量个数太多时，不要用迭代法。可在电子计算机上用高斯(Gauss)消元法解方程组(A_1)

$$|E_h(x,y)|\leqslant ch^{3+\alpha},\quad W(x,y)\in c^{3+\alpha}(\overline{\Omega})$$

这是用简练的现代数学语言表述的结果。在这里作一解释。$\overline{\Omega}$是矩形开区域Ω加上它的边界$\partial\Omega$。所谓

$$f(x,y)\in c^{3+\alpha}(\overline{\Omega})$$

是指$f(x,y)$及它的所有一阶、二阶和三阶偏导数均在$\overline{\Omega}$上连续①，且$f(x,y)$的任何三阶偏导数$\varphi(x,y)$（$\varphi(x,y)$是f_{xxx}，f_{xxy}，f_{xyy}，f_{yyy}中的任何一个）满足

$$|\varphi(x_1,y_1)-\varphi(x_2,y_2)|\leqslant M(\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2})^\alpha$$

(x_1,y_1)及(x_2,y_2)是Ω中的任意两点，M是某个正数。

$$u(x,y)\in c^{5+\alpha}(\overline{\Omega})$$

的含义可以类推。

这些条件看起来比较难掌握。但是，我们指出：只要

$$f(x,y)\in c^4(\overline{\Omega})$$

（指$f(x,y)$在$\overline{\Omega}$上有直到 4 阶的连续偏导数）则

$$f(x,y)\in c^{3+\alpha}(\overline{\Omega})$$

所以，我们可以写出一个比较实用的结论，即

若函数$f(x,y)$满足

（1） $f(x,y)\in c^4(\overline{\Omega})$

（2） 在矩形$\overline{\Omega}$的四个角点处，$f(x,y)=0$

（3） 在矩形$\overline{\Omega}$的四个角点处，$f_{xx}-f_{yy}=0$

则

（1） 问题(A)有唯一解$u(x,\ y)\in c^{5+\alpha}(\overline{\Omega})$

（2） 问题(A_1)的解$u_h(x,y)$有渐近展开式

$$u_h(x,y)=u(x,y)+h^2W(x,y)+0(h^{3+\alpha})\qquad(81)$$

在此式中的$W(x,y)$满足

$$W(x,y)\in c^{3+\alpha}(\overline{\Omega})$$

这个推论就是外推的理论根据。事实上，由（81）式，得

① “偏导数在闭域$\overline{\Omega}$上连续”这一概念的严格定义在这里不讲了。读者如对此有兴趣，请阅 Gilbag 及 Trudinger 所著《二阶椭圆型偏微分方程》第一章的最后部分。或阅吴新谋所著《数学物理方程讲义》第一章 §3。

$$u_{\frac{h}{2}}(x,y)=u(x,y)+\left(\frac{h}{2}\right)^2 W(x,y)+0(h^{3+\alpha})$$

所以

$$u^*(x,y)=\frac{1}{3}\left[4u_{\frac{h}{2}}(x,y)-u_h(x,y)\right]=u(x,y)+0(h^{3+\alpha})$$

总结一下，就是：若问题(A)中的已知函数$f(x,y)$满足上述条件(1),(2)和(3),则对于(A_1)的差分解$u_h(x,y)$和$u_{\frac{h}{2}}(x,y)$，可用公式

$$u^*(x,y)=\frac{1}{3}\left[4u_{\frac{h}{2}}(x,y)-u_h(x,y)\right] \tag{82}$$

进行外推。由此所得$u^*(x,y)$满足

$$|u^*(x,y)-u(x,y)|=0(h^{3+\alpha})$$

在刚才的例子中，$f(x,y)=2\sin x\cos y$，它有任意阶连续偏导数。又f, f_{xx}及f_{yy}在四角点$\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$、$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$、$\left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$和$\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$处均为零。可见$f(x,y)$满足条件(1)、(2)和(3)，所以可用（82）式作外推。

刚才只在点$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$处进行外推。在其余点处因缺少$u_h(x,y)$的值，所以无法用（82）式作外推。但是，在这些点上，也可用陈一林公式进行外推。(77）式是关于一元函数的陈-林公式，对于二元函数有同样公式，在此就不详细说了。

我们还要指出一点，若(A)中函数$f(x,y)$不满足上述条件(1),(2)和(3)，还要用（82）式进行外推，可能越推误差越大；所以我们在解决实际问题时，决不能不管条件任意外推。

我们叙述了矩形域上的Poisson方程的外推算法，实际上讲的还是这类问题中的一个特例，即正方形域上的零边值问题。对于更复杂的区域，它的外推法也更复杂，而且还在不断改进。关于“偏微外推”这个园地，现在好像还挂着“施工重地、闲人免进的牌子。苏联数学家马尔丘克和谢多洛夫所著的《差分及其外推》一书的英文本83年在西方出版，在此书中对“偏微外推”给

出了一些很好的结果，影响颇大。但书中对有的关键问题的证明未作说明。总之，“偏微外推”工作还远远不如“常微外推”工作做得完善。希望有兴趣的读者能在这个领域中进行工作。

§4 龙贝格(Romberg)算法

讲外推法而不提龙贝格算法是不合适的。

Romberg在1955年提出一个很好的外推算法。用这个算法可以逐次消去从低阶到高阶的各误差项，写出一个由近似值组成的“外推表”。在这个算法中，先算出一些初步的近似值，然后求出第一次外推值。将这些值再外推一次，得到第二次外推值。再将这些值外推一次，得到第三次外推值。如此继续下去……。一般说来，如果先求出 n 个初近似值，可以得到$n-1$个第一次外推值，再得到$n-2$个第二次外推值，…，最后得到一个$n-1$次外推值。最后得到的这个近似值，它的误差会相当小了。

为了说明这种算法，还是回到求π的近似值这个问题上来。

我们打算作 4 次外推。为此，先要求出 5 个初近似值。还是用

$$d_n = n\sin\frac{\pi}{n} \approx \pi$$

分别取 $n=4$，6，8，12，24，得

$$\begin{cases} d_0^{(0)} = 4\sin\dfrac{\pi}{4} = 2.8284271 \\ d_0^{(1)} = 6\sin\dfrac{\pi}{6} = 3 \\ d_0^{(2)} = 8\sin\dfrac{\pi}{8} = 3.0614674 \\ d_0^{(3)} = 12\sin\dfrac{\pi}{12} = 3.105826 \\ d_0^{(4)} = 24\sin\dfrac{\pi}{24} = 3.13262856 \end{cases}$$

第一次外推值是

$$
\left\{
\begin{aligned}
d_1^{(0)} &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2}\times 3-\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2}\times 2.8284271=3.1372512\\
d_1^{(1)} &= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2}\times 3.0614674-\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2}\times 3=3.1404968\\
d_1^{(2)} &= \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{\left(\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{12}\right)^2}\times 3.1058286-\frac{\left(\frac{1}{12}\right)^2}{\left(\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{12}\right)^2}\times 3.064674=3.1413171\\
d_1^{(3)} &= \frac{\left(\frac{1}{12}\right)^2}{\left(\frac{1}{12}\right)^2-\left(\frac{1}{24}\right)^2}\times 3.1326285-\frac{\left(\frac{1}{24}\right)^2}{\left(\frac{1}{12}\right)^2-\left(\frac{1}{24}\right)^2}\times 3.1058286=3.1415618
\end{aligned}
\right.
$$

第二次外推值是

$$
\left\{
\begin{aligned}
d_2^{(0)} &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2}\times 3.1404968-\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2}\times 3.1372512=3.1415786\\
d_2^{(1)} &= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{12}\right)^2}\times 3.1413171-\frac{\left(\frac{1}{12}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{12}\right)^2}\times 3.1404968=3.1415905\\
d_2^{(2)} &= \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{\left(\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{24}\right)^2}\times 3.1415618-\frac{\left(\frac{1}{24}\right)^2}{\left(\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{24}\right)^2}\times 3.1413171=3.1415923
\end{aligned}
\right.
$$

第三次外推值是

$$
\begin{cases}
d_3^{(0)}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2-\left(\dfrac{1}{12}\right)^2}\times 3.1415905-\dfrac{\left(\dfrac{1}{12}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2-\left(\dfrac{1}{12}\right)^2}\\
\qquad\times 3.1415786=3.1415919\\
d_3^{(1)}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{6}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{6}\right)^2-\left(\dfrac{1}{24}\right)^2}\times 3.1415923-\dfrac{\left(\dfrac{1}{24}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{6}\right)^2-\left(\dfrac{1}{24}\right)^2}\\
\qquad\times 3.1415905=3.1415923
\end{cases}
$$

第四次外推值是

$$
d_4^{(0)}=\frac{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2-\left(\dfrac{1}{24}\right)^2}\times 3.1415923-\frac{\left(\dfrac{1}{24}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2-\left(\dfrac{1}{24}\right)^2}
$$

$$
\times 3.1415919=3.1415922
$$

最后这个近似值$d_4^{(0)}$，已经相当精确了①。由此得到关于π的近似值的外推表如下

表 5

$d_0^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$d_3^{(i)}$	$d_4^{(i)}$
2.8284271				
	3.1372512			
3		3.1415786		
	3.1404968		3.1415919	
3.0614674		3.1415905		3.1415922
	3.1413171		3.1415923	
3.1058286		3.1415923		
	3.1415618			
3.13262856				

如果您认为$d_4^{(0)}$还不够精确，那就多算一些初近似值，再

① 如果不用外推法，只计算直径为1的圆内接正多边形周长。要算到圆内接正2800边形，它的周长才是3.1415918。由此可见外推法的作用。

多外推几次。用电子计算机进行外推，是很方便的，这种程序很简单。不过，外推次数过多也不好，因为运算过程中的舍入误差将成为一大障碍，使最后的外推值的误差超过理论上的估计（当然这种情形是可以控制的，我们不去讨论它了）。

现在来说明上述外推算法的理论基础。

令 $\frac{1}{n}=h$，记 $d_n=n\sin\frac{\pi}{n}=d(h)$，于是

$$
\begin{aligned}
d(h) &= n\sin\frac{\pi}{n}=\frac{1}{h}\sin h\pi \\
&= \frac{1}{h}\left[\pi h-\frac{1}{3!}(\pi h^3)+\frac{1}{5!}(\pi h)^5-\cdots\right] \\
&= \pi-\frac{\pi^3}{3!}h^2+\frac{\pi^5}{5!}h^4-\cdots
\end{aligned}
$$

即

$$
d(h)=\pi+c_1h^2+c_2h^4+c_3h^6+c_4h^8+\cdots \qquad (83)
$$

这是$d(h)$的渐近展开式，它有无穷多个含 h 的偶数次幂的项。(83) 式是我们进行多次外推的理论根据。

若 n 分别取正整数$n_1, n_2, n_3, \cdots, n_i, \cdots$，$(n_1<n_2<n_3<\cdots)$ 则相应地有$h_i=\frac{1}{n_i}$的序列

$$
h_1, h_2, h_3, \cdots, h_i, \cdots
$$

于是，有近似值序列

$$
d(h_1), d(h_2), d(h_3), \cdots, d(h_i), \cdots,
$$

现在设法作一次外推。因为

$$
d(h_i)=\pi+c_1h_i^2+c_2h_i^4+c_3h_i^6+c_4h_i^8+\cdots
$$

$$
d(h_{i+1})=\pi+c_1h_{i+1}^2+c_2h_{i+1}^4+c_3h_{i+1}^6+c_4h_{i+1}^8+\cdots
$$

所以

$$
\begin{aligned}
h_{i+1}^2d(h_i) &= \pi h_{i+1}^2+c_1h_i^2h_{i+1}^2+c_2h_i^4h_{i+1}^2+c_3h_i^6h_{i+1}^2 \\
&\quad +c_4h_i^8h_{i+1}^2+\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_i^2d(h_{i+1}) &= \pi h_i^2+c_1h_i^2h_{i+1}^2+c_2h_i^2h_{i+1}^4+c_3h_i^2h_{i+1}^6 \\
&\quad +c_4h_i^2h_{i+1}^8+\cdots
\end{aligned}
$$

于是

$$h_i^2 d(h_{i+1}) - h_{i+1}^2 d(h_i) = \pi(h_i^2 - h_{i+1}^2) + c_2(h_i^2 h_{i+1}^4 - h_i^4 h_{i+1}^2) + c_3(h_i^2 h_{i+1}^6 - h_i^6 h_{i+1}^2) + c_4(h_i^2 h_{i+1}^8 - h_i^8 h_{i+1}^2) + \cdots$$

由此得到

$$\frac{h_i^2 d(h_{i+1}) - h_{i+1}^2 d(h_i)}{h_i^2 - h_{i+1}^2} = \pi - c_2 h_i^2 h_{i+1}^2 - c_3 h_i^2 h_{i+1}^2 (h_i^2 + h_{i+1}^2) - c_4 h_i^2 h_{i+1}^2 (h_i^4 + h_{i+1}^4) - \cdots \quad (84)$$

现在令

$$d(h_i) = d_0^{(i)}$$

$$[h_i^2 d(h_{i+1}) - h_{i+1}^2 d(h_i)]/(h_i^2 - h_{i+1}^2) = d_1^{(i)}$$

即

$$d_1^{(i)} = [h_i^2 d_0^{(i+1)} - h_{i+1}^2 d_0^{(i)}]/(h_i^2 - h_{i+1}^2) \quad (85)$$

由（83）式可见

$$d_0^{(i)} = \pi + c_1 h_i^2 + c_2 h_i^4 + c_3 h_i^6 + c_4 h_i^8 + \cdots$$

所以

$$d_0^{(i)} = \pi + 0(h_i^2) \quad (86)$$

由（84）及（85）二式可见

$$d_1^{(i)} = \pi + 0(h_i^2 h_{i+1}^2) \quad (87)$$

这就是说，$d_1^{(i)}$ 比 $d_0^{(i)}$ 的误差小得多；$d_1^{(i)}$ 就是第一次外推值。

我们再设法求出第二次外推值 $d_2^{(i)}$（$i = 0, 1, 2$），使它们比 $d_1^{(i)}$ 的近似程度更高。

把（84）式写成

$$d_1^{(i)} = \pi - c_2 h_i^2 h_{i+1}^2 - c_3 h_i^2 h_{i+1}^2 (h_i^2 + h_{i+1}^2) - c_4 h_i^2 h_{i+1}^2 (h_i^4 + h_{i+1}^4) - \cdots \quad (88)$$

于是

$$d_1^{(i+1)} = \pi - c_2 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2 - c_3 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2 (h_{i+1}^2 + h_{i+2}^2) - c_4 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2 (h_{i+1}^4 + h_{i+2}^4) - \cdots \quad (89)$$

为消去此二式右端的低次项，以 h_i^2 乘（89）的各项，以 h_{i+2}^2 乘

（88）的各项，再相减，得

$$h_i^2 d_1^{(i+1)} - h_{i+2}^2 d_1^{(i)} = (h_i^2 - h_{i+2}^2)\pi - c_3 h_i^2 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2 (h_{i+2}^2 - h_i^2) - c_4 h_i^2 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2 [(h_{i+1}^2 + h_{i+2})^2 (h_{i+1}^4 + h_{i+2}^4) - (h_i^2 + h_{i+1}^2)(h_i^4 + h_{i+1}^4)] - \cdots$$

所以

$$[h_i^2 d_1^{(i+1)} - h_{i+2}^2 d_1^{(i)}]/(h_i^2 - h_{i+2}^2) = \pi + c_3 h_i^2 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2 + \cdots$$

令

$$d_2^{(i)} = [h_i^2 d_1^{(i+1)} - h_{i+2}^2 d_1^{(i)}]/(h_i^2 - h_{i+2}^2)$$

则

$$d_2^{(i)} = \pi + c_3 h_i^2 \cdot h_{i+1}^2 \cdot h_{i+2}^2 + \cdots \qquad (90)$$

于是

$$d_2^{(i)} = \pi + 0(h_i^2 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2) \qquad (91)$$

$d_2^{(i)}$ 即第二次外推值。比较（91）和（87）两式，可知 $d_2^{(i)}$ 的近似程度更高。

再求第三次外推值。由（90）式，可知

$$d_2^{(i+1)} = \pi + c_3 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2 h_{i+3}^2 + \cdots$$

所以

$$h_i^2 d_2^{(i+1)} - h_{i+3}^2 d_2^{(i)} = (h_i^2 - h_{i+3}^2)\pi + \cdots$$

令

$$d_3^{(i)} = [h_i^2 d_2^{(i+1)} - h_{i+3}^2 d_2^{(i)}]/(h_i^2 - h_{i+3}^2)$$

容易看出

$$d_3^{(i)} = \pi + 0(h_i^2 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2 h_{i+3}^2) \qquad (92)$$

$d_3^{(i)}$ 是第三次外推值。

一般说来，令

$$d_K^{(i)} = [h_i^2 d_{K-1}^{(i+1)} - h_{i+K}^2 d_{K-1}^{(i)}]/(h_i^2 - h_{i+K}^2) \qquad (93)$$

可以证明

$$d_K^{(i)} = \pi + 0(h_i^2 h_{i+1}^2 \cdots h_{i+K}^2) \qquad (94)$$

（93）式告诉我们如何从第 $K-1$ 次外推值 $d_{K-1}^{(i)}$ 得到第 K 次外推值 $d_K^{(i)}$。

把各次外推值排成表，就得到外推表。

关于求π的多次外推法及其理论基础，已经讲完了。这种多次外推算法，就是龙贝格算法。这种算法已经用到许多方面。

说来也是凑巧，我们讲外推法，既是从求π值开始，又是以求π值告终。中间涉及若干与微分方程有关的问题。但是外推法的活动范围决不止此。它在积分方程、代数方程……，各方面，有广泛的运用。我们在第四章中讲到的有限元法，也是一种近似解法。所以用有限元法得到的解，也可以外推。自80年以来，中国学者在有限元解的外推方面，取得了巨大进展①。本书因篇幅所限，不能谈这些工作了。

人们看到，电子计算机的迅速发展，并没有降低对计算方法的要求，反而刺激了计算方法的发展。广泛运用和发展外推法，是当前的一项迫切的任务。

参 考 文 献

〔1〕G.I.Marchuk, V.V.Shaidurov, Difference methods and Their Extrapolations, Springer-Verlag, 1983。

〔2〕J,Stoer,R.Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980。

〔3〕林群，刘嘉荃，《偏微分方程的高精度算法》，苏州大学讲习班讲义，1984

〔4〕陈传淼，《外推法及其分析》，湘潭大学数学系讲义，1984。

〔5〕D.Gilbarg, N.Trudinger, Elliptic partial equations of second order, springer-Verlag, New york, 1977（有中译本）。

〔6〕林群，吕涛，沈树民，Asymptotic expansion for finite element approximations，数理科学，科学院成都分院数理科学研究所研究报告，1983。

〔7〕李岳生，黄友谦，《数值逼近》，人民教育出版社，1978。

① 详情见本书末所列举的论文。